第 28 卷 第 5 期
2007 年 10 月

暨南大学学报(自然科学版)
Journal of Jinan University (Natural Science)

Vol. 28 No. 5
Oct. 2007

具有线性目标函数的半无限凸规划的逆问题

杨青骥[1,2], 朱道立[1]

(1. 复旦大学管理学院, 上海 200433; 2. 上海金融学院应用数学系, 上海 201209)

[摘 要] 在某些条件下提出具有线性目标函数的半无限凸规划的逆问题,并运用 Rockafellar 对偶理论得到这一逆问题的对偶问题. 对于特殊情况的半无限线性规划和线性规划给出了相应的结论.

[关键词] 半无限规划; 逆问题; 对偶问题

[中图分类号] O221.2 [文献标识码] A [文章编号] 1000-9965(2007)05-0458-03

Inverse problem of convex semi-infinite programming with linear objective

YANG Qing-ji[1,2], ZHU Dao-li[1]

(1. School of Management, Fudan University, Shanghai, 200433, China;
2. Department of Applied Mathematics, Shanghai Finance University, Shanghai, 201209, China)

[Abstract] The inverse problem of convex semi-infinite programming with linear objective is presented under certain assumptions. By applying Rockafellar duality theory, dual problems for such inverse problems are also given. In some special cases, results about linear semi-infinite programming problem and linear programming problem are obtained.

[Key words] semi-infinite programming; inverse problem; dual problem

对于一个优化问题,通常假设已知参数,求问题的最优解. 这类问题被称为正问题. 然而,在实际问题中,我们可能希望在对某些参数适当修改后,正问题的一个可行解 x^0 成为一个最优解. 这类问题被称为逆问题. 很多学者就某些优化问题的逆问题展开了研究. 1981 年,BITRAN 等[1]研究了选址问题的逆优化问题;随后,BURTON 和 TOINT[2]、SOKKALINGAM[3]、YANG 等[4]、ZHANG 等[5]分别研究了逆最短路问题、逆最小割问题和逆生成树问题; ZHANG 和 LIU[6]提出在 l_1 范数意义下解逆线性规划问题的方法,并用来求解逆最小成本流问题和逆指派问题;之后,AHUJA 和 ORLIN[7-8]研究了 l_1 和 l_∞ 范数意义下的逆线性规划问题,以及在逆组合优化中的运用;ZHANG 和 LIU[9]给出逆组合优化问题的一般模型;2004 年,HEUBERGER[10]给出逆组合优化问题的一般表述,并列出诸多求解方法.

然而,在物理和社会科学中的很多模型要求考虑在一段时间内或一个集合区域内每一点状态的约束条件[11]. 这些正是半无限规划的特征. 半无限规划(semi-infinite programming,简记为 SIP)是含有有限个变量 $x \in \mathbf{R}^n$ 和无限多个约束条件的优化问题:

$$\begin{aligned} &\min_x \quad f(x) \\ &\text{s.t.} \quad g(x,t) \geqslant 0, t \in \Omega \end{aligned} \tag{1}$$

其中,Ω 是一个无限指标集. 如果目标函数 $f(x)$ 是凸函数,并且对于每一 $t \in \Omega$,约束函数 $g_t(\cdot) = g(\cdot, t)$ 是凹的,半无限规划(1)称为半无限凸规划(记为 CSIP). 如果 $f(x) = c^{\mathrm{T}}x, g(x,t) = a(t)^{\mathrm{T}}x - b(t)$,(1)转化为半无限线性规划(记为 LSIP).

在本文中,我们给出具有线性目标的 CSIP 逆问题的描述. 作为特殊情况,得到 LSIP 的逆问题及线

[收稿日期] 2007-08-08
[作者简介] 杨青骥(1976-),男,讲师,博士研究生,研究方向:经济、社会系统中逆问题

性规划的逆问题. 此外，借助于 Rockafellar 对偶理论，给出了这些逆问题的对偶问题.

1 逆问题

考虑 SIP (1). 其中，$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$\Omega$ 是一个紧的 Hausdorff 空间，$g:\mathbf{R}^n\times\Omega\to\mathbf{R}$. 假设 f 和 g 的凸性和可微性如下

A1. f 是凸函数，对于任意的 $t\in\Omega$，g 关于 x 是凹函数；

A2. f 在 $\mathbf{R}^n$ 上可微，g 对于任意的 $x\in\mathbf{R}^n$，关于 t 连续，并且在 $\mathbf{R}^n\times\Omega$ 上关于 x 连续可微；

A3. (Slater 约束) 任意的 $t\in\Omega$，存在 $\tilde{x}\in\mathbf{R}^n$，满足 $g(\tilde{x},t)>0$.

定理 1.1[12] 设 A1 - A3 成立. 问题(1)的最小值在 $x^0\in\mathbf{R}^n$ 达到当且仅当 x^0 可行且存在 $\lambda_i\in\mathbf{R}$ 和 $t_i\in\Omega$，$i=1,2,\cdots,k$，其中 $k\leqslant n$，使得

$$\nabla f(x^0)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot\nabla_x g(x^0,t_i)=0,$$
$$\lambda_i\cdot g(x^0,t_i)=0,$$
$$\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,k.$$

作为 CSIP 问题的特殊形式：

$$\begin{aligned}&\min_x\quad c^{\mathrm{T}}x\\ &\text{s.t.}\quad g(x,t)\geqslant 0,t\in\Omega\end{aligned}\tag{2}$$

即在(1)中取 $f(x)=c^{\mathrm{T}}x$，因此满足 A1 - A3.

相应的逆问题是求某种度量下，将成本向量 c 作尽可能少地调整至 d，使得预先设定的可行解 x^0 成为下列问题的最优解

$$\begin{aligned}&\min_x\quad d^{\mathrm{T}}x\\ &\text{s.t.}\quad g(x,t)\geqslant 0,t\in\Omega\end{aligned}\tag{3}$$

根据定理 1.1，x^0 是(3)的最优解，当且仅当存在 $\lambda_i\in\mathbf{R}$，$t_i\in\Omega$，$i=1,2,\cdots,k$，$k\leqslant n$，使得

$$d-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla_x g(x^0,t_i)=0,$$
$$\lambda_i\cdot g(x^0,t_i)=0,$$
$$\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,k.$$

因此，(2)的逆问题叙述为：

$$\begin{aligned}&\min_\lambda\quad\Big\|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot\nabla_x g(x^0,t_i)-c\Big\|_p\\ &\text{s.t.}\quad\lambda_i\cdot g(x^0,t_i)=0,\\ &\qquad\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,k.\end{aligned}\tag{4}$$

其中，$\|\cdot\|_p$ 是 p 范数. 记 $G=(\nabla_x g(x^0,t_1),\cdots,\nabla_x g(x^0,t_k))^{\mathrm{T}}$，$g=(g(x^0,t_1),\cdots,g(x^0,t_k))^{\mathrm{T}}$，$\lambda=(\lambda_1,\cdots\lambda_k)^{\mathrm{T}}$. 于是，(4)有如下形式：

$$\begin{aligned}&\min_{\lambda\geqslant 0}\|G^{\mathrm{T}}\lambda-c\|_p\\ &\text{s.t.}\quad g^{\mathrm{T}}\lambda=0.\end{aligned}\tag{5}$$

考虑 LSIP：

$$\begin{aligned}&\min_x\quad c^{\mathrm{T}}x\\ &\text{s.t.}\quad a(t)^{\mathrm{T}}x\geqslant b(t),t\in\Omega\end{aligned}\tag{6}$$

假设 $a(t)$，$b(t)$ 分别关于 t 连续且对任意的 $t\in\Omega$，存在 $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$ 满足 $a(t)^{\mathrm{T}}\bar{x}>b(t)$，则 A1 - A3 成立. 设 x^0 是(6)的可行解，根据定理 1.1，(6)的逆问题如下

$$\begin{aligned}&\min_\lambda\quad\Big\|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a(t_i)-c\Big\|\\ &\text{s.t.}\quad\lambda_i\cdot(a(t_i)^{\mathrm{T}}x^0-b(t_i))=0,\\ &\qquad\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,k.\end{aligned}\tag{7}$$

记 $k\times n$ 矩阵 $B=(a(t_1),\cdots,a(t_k))^{\mathrm{T}}$，$\Lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)^{\mathrm{T}}$，$e=(b(t_1),\cdots,b(t_k))^{\mathrm{T}}$，于是(7)转化为

$$\begin{aligned}&\min_\Lambda\quad\|B^{\mathrm{T}}\Lambda-c\|_p\\ &\text{s.t.}\quad(Bx^0-e)^{\mathrm{T}}\Lambda=0,\\ &\qquad\Lambda\geqslant 0.\end{aligned}\tag{8}$$

更一般地，对于线性规划

$$\begin{aligned}&\min_x\quad c^{\mathrm{T}}x\\ &\text{s.t.}\quad Ax\geqslant b.\end{aligned}\tag{9}$$

设 x^0 是(9)的可行解，相应的逆线性规划为

$$\begin{aligned}&\min_\lambda\quad\|A^{\mathrm{T}}\lambda-c\|_p\\ &\text{s.t.}\quad(Ax^0-b)^{\mathrm{T}}\lambda=0,\\ &\qquad\lambda\geqslant 0.\end{aligned}\tag{10}$$

2 逆问题的对偶问题

本节中，我们将 Rockafellar 对偶理论应用到上述逆问题.

设 F 在 $\mathbf{R}^n$ 内是凸函数，H 在 $\mathbf{R}^m$ 内是凹函数，A 是 $m\times n$ 矩阵，$b\in\mathbf{R}^m$，$c\in\mathbf{R}^n$. 引入函数：

$$\psi(x)=F(x)-H(Ax-b)+c^{\mathrm{T}}x,$$
$$\phi(y)=H^c(y)-F^c(A^{\mathrm{T}}y-c)+b^{\mathrm{T}}y.$$

这里 $F^c(z)$ 和 $H^c(v)$ 分别表示 $F(x)$ 和 $H(x)$ 的共轭函数. 对于问题：

P1：$\inf_x\psi(x)$

和

P2：$\sup_y\phi(y)$，

Rockafellar 定理[13] 说明：在一定条件下，这两个问题是对偶的. 特别地，我们运用如下结论.

定理 2.1[①] 设 ρ、σ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的对偶且对称的 Minkowski 范数. 设 A 是秩为 $m(<n)$ 的常数 $m\times n$

① MARCOTTE P, ZHU Daoli, The application of Rockafellar duality theory to the inverse optimization problems, Note, 2002.

矩阵,$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$,$\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n$ 是常向量. 则下列规划是对偶的:

$$\min_{x\geq 0}\sigma(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\qquad \begin{aligned}&\max_{y}\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\&\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{c},\rho(\boldsymbol{y})\leqslant 1\end{aligned}$$

为了应用上述定理,将(5)中的向量 $\boldsymbol{g}$ 分解为 $\boldsymbol{g}^0$ 和 $\boldsymbol{g}^+$,其中 $\boldsymbol{g}^0>\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{g}^+=\boldsymbol{0}$. 将矩阵 $\boldsymbol{G}$ 分解为两个子矩阵 $\boldsymbol{G}^0$、$\boldsymbol{G}^+$. 相应地,$\boldsymbol{\lambda}$ 分解为 $\boldsymbol{\lambda}^0$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^+$,其中 $\boldsymbol{\lambda}^0=\boldsymbol{0}$. 逆问题(5)可写为:

$$\min_{\lambda^+\geq 0}\|(\boldsymbol{G}^+)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^+-\boldsymbol{c}\|_p \tag{11}$$

应用定理 2.1,得到

定理 2.2 规划(11)与下面规划对偶

$$\begin{aligned}&\max_{y}\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\&\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{G}^+\boldsymbol{y}\leqslant 0\\&\qquad \|\boldsymbol{y}\|_q\leqslant 1.\end{aligned}$$

其中,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

对矩阵 $\boldsymbol{B}$、向量 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 作类似地分解,有:

推论 2.1 下列规划互为对偶:

$$\min_{A^+\geq 0}\|(\boldsymbol{B}^+)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^+-\boldsymbol{c}\|_p;\qquad \begin{aligned}&\max_{y}\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\&\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{B}^+\boldsymbol{y}\leqslant 0,\\&\qquad \|\boldsymbol{y}\|_q\leqslant 1.\end{aligned}$$

类似地,对于问题(10),有

推论 2.2 下列规划相互对偶:

$$\min_{\lambda^+\geq 0}\|(\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^+-\boldsymbol{c}\|_p;\qquad \begin{aligned}&\max_{y}\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\&\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{y}\leqslant 0,\\&\qquad \|\boldsymbol{y}\|_q\leqslant 1.\end{aligned}$$

[参考文献]

[1] BITRAN G R, CHANDRU V, SEMPOLINSKI D E, et al. Inverse optimization: an application to the capacitated plant location problem [J]. Management Science, 1981 27,(10): 1120 - 1141.

[2] BURTON D, TOINT Ph L. On an instance of the inverse shortest paths problem [J]. Mathematics Programming, 1992, 53: 45 - 61.

[3] SOKKALINGAM P T, AHUJA R K, ORLIN J B. Solving inverse spanning tree problems through network flow techniques [J]. Operations Research, 1999, 47,(2): 291 - 298.

[4] YANG Chao, ZHANG Jianzhong, MA Zhongfan. Inverse maximum flow and minimum cut problem[J]. Optimization, 1997, 40:147 - 170.

[5] ZHANG Jianzhong, CAI Maocheng. Inverse problem of minimum cuts [J]. Mathematical Methods of Operations Research, 1998, 48 : 51 - 58.

[6] ZHANG Jianzhong, LIU Zhenhong. Calculating some inverse linear programming problem [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1996, 72: 261 - 273.

[7] AHUJA R K, ORLIN J B. Inverse Optimization [J]. Operations Research, 2001, 49(5): 771 - 783.

[8] AHUJA R K, ORLIN J B. Combinatorial Algorithms for inverse network flow problems [J]. Networks, 2002, 40 (4):181 - 187.

[9] ZHANG Jianzhong, LIU Zhenhong. A general model of some inverse combinatorial optimization problems and its solution method under l∞ norm [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2002, 6: 207 - 227.

[10] HEUBERGER C. Inverse combinatorial optimization: a survey on problems, methods, and results [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2004, 8: 329 - 361.

[11] HETTICH R, KORTANEK K O. Semi - infinite programming: theory, methods, and applications[J]. SIAM Review,1993, 35(3): 380 - 429.

[12] ITO S, LIU Y,TEO K L. A dual parametrization method for convex semi - infinite programming [J]. Annals of Operations Research, 2000, 98:189 - 213.

[13] KAPLAN W. Maxima and Minima with Applications[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1999: 1 - 284.

[责任编辑:王景周]