

# 射影流形上小收缩态射的翻转与法丛的关系

苏继红

(暨南大学数学系, 广东 广州 510632)

[摘要] 设  $X$  是射影流形,  $f: X \rightarrow Y$  是  $X$  的小收缩态射,  $f$  的例外集  $E$  是光滑子簇. 如果  $f(E)$  是零维的,  $E$  的维数不大于  $X$  的一半且法丛  $N_{E/X}$  与  $\bigoplus O_E(-1)$  同构,  $t = \text{codim} E$ , 那么  $f$  的翻转  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  一定存在.

[关键词] 射影流形; 小收缩态射; 翻转; 法丛

[中图分类号] O181 [文献标识码] A [文章编号] 1000-9965(2008)05-0421-03

## Relations between normal bundles and Flips of morphisms on projective manifolds

SU Ji-hong

(Department of Mathematics, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

[Abstract] Let  $X$  be a projective manifold and  $f: X \rightarrow Y$  a small contraction morphism of  $X$ . Let the exceptional locus  $E$  of  $f$  be smooth subvariety. Suppose that the dimension of  $f(E)$  is zero and the normal bundle  $N_{E/X}$  is  $\bigoplus O_E(-1)$ , where  $t = \text{codim} E$ . Then there exists the flip  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  of  $f$ .

[Key words] projective manifold; small contraction; flip; normal bundle

由 Mori, Kawamata 等发起的代数簇的极小模型计划 (Minimal Model Program)<sup>[1]</sup> 是高等代数簇双有理等价分类理论的核心. 其最困难的部分就是证明 Flip 猜测, 即代数簇的小收缩态射一定存在翻转 (Flip). Mori<sup>[1]</sup> 证明了三维代数簇的小收缩态射一定存在翻转, 从而完成了三维代数簇的极小模型计划. Kawamata<sup>[2]</sup> 证明了在光滑的情况下, 四维代数簇的小收缩态射也一定存在翻转. 该结果被认为是继 Mori 之后, 最有代表性的进展之一<sup>[3]</sup>.

本文将进一步讨论高维射影流形的小收缩态射的翻转的存在性问题. 指出小收缩态射的例外集的法丛对翻转的构造至关重要, 并通过例外集的法丛去构造小收缩态射的翻转.

设  $X$  是射影流形,  $f: X \rightarrow Y$  是  $X$  的小收缩态射,  $f$  的例外集  $E$  的每个不可约分支  $E_i$  是光滑子簇. 本文将证明:

如果  $\dim f(E) = 0$ ,  $\dim E \leq \frac{1}{2}(\dim X + 1)$  且  $N_{E/X} \cong \bigoplus O_{E_i}(-1)$ , 那么  $f$  的翻转  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  一定存在.

由文献[3]知, 当时  $\dim X = 4$  时,  $\dim E = 2$ ,  $f(E_i)$  为一点, 且  $N_{E_i/X} \cong \bigoplus O_{E_i}(-1)$ , 即上述假设条件均满足. 因此本文的结果可视为文献[3]相关结果在高维射影流形上的推广.

## 1 预备知识

本文总是在复数域上讨论. 设  $X$  是  $n$  维射影流

形,  $X$  上的典范除子或典范线丛均记为  $K_X$ .  $X$  的除子  $D$  称为数字有效的 (nef), 如果  $D$  与  $X$  的任何不可约曲线  $C$  的相交数非负, 即  $D \cdot C \geq 0$ .

$X$  上的一个 1-循环  $Z$  为一个有限和  $Z = \sum n_i C_i$ , 这里  $C_i$  是  $X$  的不可约曲线,  $n_i$  为整数. 当所有  $n_i \geq 0$  时,  $Z$  称为有效的.

定义  $N_1(X) = (\{X \text{ 上的 } 1\text{-循环}\} / \sim) \otimes \mathbf{R}$

$$N^1(X) = (\{X \text{ 上的除子}\} / \sim) \otimes \mathbf{R}$$

这里  $\sim$  分别代表  $X$  的 1-循环和除子的数字等价关系.

$\overline{NE}_{K_X}$  为  $N_1(X)$  中的有效 1-循环生成的凸锥的闭包,  $\overline{NE}_{K_X} = \{Z \in \overline{NE}(X) \mid K_X \cdot Z \geq 0\}$ . 设  $C$  是  $X$  中的曲线,  $R = \mathbf{R}_+[C]$  称为  $X$  的半线束 (extremal ray). 如果  $K_X \cdot C > 0$  且对任何  $[Z_1], [Z_2] \in \overline{NE}(X)$  使得  $[Z_1 + Z_2] \in R$ , 则必有  $[Z_1]$  和  $[Z_2]$  均在  $R$  中.

定理 2.1 (锥体定理<sup>[4]</sup>) 设  $X$  是射影流形, 则  $\overline{NE}(X)$  是包含  $\overline{NE}_{K_X}$  和所有半线束的最小凸锥. 对任何包含  $\overline{NE}_{K_X} - \{0\}$  的开凸锥  $U$ , 仅有有限个半线束不在  $U$  中, 每个半线束由一条有理曲线  $C$  生成并且  $0 < -K_X \cdot C < \dim X + 1$ .

定理 2.2 (收缩定理<sup>[5]</sup>) 设  $X$  是射影流形,  $R$  是半线束, 则存在正规射影簇  $Y$  和满态射  $f: X \rightarrow Y$ , 使得  $f$  的纤维是连通的, 并且对于  $X$  的整曲线  $C$ , 必有  $C$  被  $f$  收缩为一点当且仅当  $[C] \in R$ . 态射  $f$  被称为  $X$  关于  $R$  的收缩态射.

命题 2.3<sup>[6]</sup> 设  $X$  是射影流形,  $R$  是  $X$  的半线束,  $f: X \rightarrow Y$  是关于  $R$  的收缩态射,

$$\ell(R) = \min\{-K_X \cdot C \mid [C] \in R\},$$

$C$  是有理曲线,  $E$  是  $f$  的例外集, 则有  $\dim E \geq \dim X + \ell(R) - d - 1$ , 这里  $d$  是  $f$  的任一非平凡纤维的维数.

## 2 主要结果及证明

本节给出本文的主要结果及其证明.

定义 设  $X$  是射影流形,  $f: X \rightarrow Y$  是小收缩态射. 如果存在一个最多仅有 terminal 奇点的正规射影簇  $X^+$  以及一个双有理态射  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  使得  $K_{X^+}$  是  $f^*$ -丰富的, 那么  $f^*$  称为  $f$  的翻转 (Flip).

Flip (存在性) 猜测  $(E)_n$ : 设  $X$  是最多仅有 terminal 奇点的  $n$  维射影簇,  $f: X \rightarrow Y$  是小收缩态射, 那么  $f$  的翻转  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  是一定存在的.

Mori<sup>[1]</sup> 证明了  $(E)_3$ , 即设  $X$  是最多仅有 terminal 奇点的 3 维射影簇,  $f: X \rightarrow Y$  是小收缩态射, 那么

$f$  的翻转  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  是一定存在的. 从而解决了三维代数簇的极小模型的存在性问题 (获 1990 年度菲尔兹奖).

当  $\dim X = n \geq 4$  时,  $(E)_n$  远远没有解决, 至今最有代表性的进展是 Kawamata<sup>[2]</sup> 证明了如果  $X$  是 4 维射影流形, 则  $(E)_4$  成立, 即

定理 2.4<sup>[2]</sup> 设  $X$  是 4 维射影流形. 如果  $f: X \rightarrow Y$  是小收缩态射,  $f$  的例外集  $E$  是不可约的, 则有

$$E \cong P^2, N_{E/X} \cong \bigoplus^2 O_{P^2}(-1)$$

并且  $f$  的翻转  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  一定存在的.

由命题 2.3 和定理 2.4 知, 当  $\dim X = 4$  时, 必有  $\dim E = 2$ ,  $\dim f(E) = 0$  且  $N_{E/X} \cong \bigoplus^2 O_{P^2}(-1)$ .

接下来对一般高维射影流形  $X$  来说, 自然要问, 如果  $N_{E/X} \cong \bigoplus^t O_E(-1)$ ,  $t = \operatorname{codim} E$ ,  $f$  的翻转  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  是否一定存在?

本文指出  $f$  的例外集的法则对  $f$  的翻转  $f^*$  的存在性有重要影响. 以下是本文的主要结果.

定理 设  $X$  是射影流形,  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  是小收缩态射,  $f$  的例外集是  $E$  光滑子簇. 如果

$$\dim f(E) = 0, \dim E \leq \frac{1}{2}(\dim X + 1), \text{ 且}$$

$$N_{E/X} \cong \bigoplus^t O_E(-1), t = \operatorname{codim} E,$$

那么  $f$  的翻转  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  一定存在.

证明 由射影公式  $K_E = (K_X + \det N_{E/X})|_E$  得  $K_E + \det(N_{E/X})^{-1} = K_X|_E$ .

由  $\dim f(E) = 0$  知  $f(E)$  的闭包是代数簇  $Y$  的零维闭子集, 故  $f(E)$  为有限个点. 设  $f(E) = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ . 由收缩定理知  $f$  的纤维是连通的, 故每个  $f^{-1}(p_i)$  是  $E$  的闭子簇. 如果  $m > 1$ , 那么  $E = f^{-1}(p_1) \cup \dots \cup f^{-1}(p_m)$ . 这与  $E$  是不可约的矛盾. 因此  $m = 1$ , 即  $E$  被  $f$  收缩为一点. 设  $R$  是小收缩态射  $f: X \rightarrow Y$  所对应的半线束, 则有  $E = \{x \in C \mid [C] \in R\}$ . 任取整曲线  $C \subset E$ , 由锥体定理得  $-K_X|_E \cdot C = -K_X \cdot C > 0$ , 再由 [7] 知  $(-K_X)|_E$  在  $E$  上是丰富的. 于是  $K_E + \det(N_{E/X})^{-1}|_E = K_X|_E$  不是数字有效的. 又  $N_{E/X} = \bigoplus O_X(-1)$ , 因此得

$$K_E + \det \bigoplus O_X(1)|_E = K_X|_E \text{ 不是数字有效的.}$$

另一方面, 由 [6] 和假设

$$\frac{\dim X}{2} \leq \dim E \leq \frac{1}{2}(\dim X + 1). \text{ 于是}$$

(i) 当  $\dim X = 2k$  时,  $\dim E = k$ , 则有

$$rk(\bigoplus_{\dot{O}_X}(-1)) = \dim X - \dim E = k,$$

由[8]定理1得  $E \cong P^k$ .

(ii) 当  $\dim X = 2k - 1$  时,  $\dim E = k$ , 于是

$$rk(\bigoplus_{\dot{O}_X}(-1)) = k - 1, \text{ 由[8]定理2得}$$

$E \cong P^k$  或  $Q^k$ . 因此

$$(E, N_{E/X}) \cong (P^k, \bigoplus_{P^k}(-1)), (P^k, \bigoplus_{P^k}(-1))$$

或者  $(Q^k, \bigoplus_{Q^k}(-1))$ .

设  $\sigma: V \rightarrow X$  是没中心  $E$  的吹开 (blowing up),  $F$  为例外除子, 则有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{j} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \sigma \\ E & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

因为  $N_{E/X} = \bigoplus_{\dot{O}_E}(-1)$ , 由文献[9]定理 II 8. 24 知  $F = \text{proj}_E(N_E^*/X) = E \times P^{t-1}$ , 这里  $t = \dim X - \dim E$ . 考虑投射

$$\begin{array}{ccc} F = E \times P^{t-1} & \xrightarrow{q} & P^{t-1} \\ \downarrow p & & \\ E & & \end{array}$$

再由[9]定理 II 8. 24 得

$$O_F(1) = p^* O_E(1) \otimes q^* O_{P^{t-1}}(1) \text{ 且}$$

$$N_{F/V} = O_F(-1). \text{ 由射影公式}^{[10]} \text{得 } K_V = \sigma^*(K_X) + (t-1)F$$

由前面已知  $E$  是  $P^k$  或  $Q^k$ , 任取一直线  $l \subset E$  使  $l$  在投射  $q: E \times P^{t-1} \rightarrow P^{t-1}$  的一个纤维中, 于是  $K_V \cdot l = (\sigma^*(K_X) + (t-1)F) \cdot l = K_X \cdot C + 1 - t$  这里  $C$  是  $E$  中一直线, 故  $K_X \cdot C < 0$ , 于是  $K_X \cdot l < 0$ .

由[4]得另一收缩映射  $\varphi: V \rightarrow X^+$  使得  $R_+[l]$  是  $\varphi$  中的半线簇. 由[9]定理 II 8. 24 知  $V$  正是  $X^+$  沿  $\varphi(F) = P^{t-1}$  的吹开 (Blow up). 因此,  $X^+$  是光滑的.

下面证  $X^+$  是  $f$  的翻转.

任取一直线  $\omega$  在投射  $p: F \rightarrow E$  的一个纤维中, 注意到  $\omega$  在  $\sigma$  下的一个象为一个点, 故

$$K_V \cdot \omega = (\sigma^*(K_X) + (t-1)F) \cdot \omega = 1 - t.$$

另一方面, 由射影公式有

$$K_V = \varphi^*(K_{X^+}) + (n-t)F. \text{ 于是}$$

$$1-t = K_V \cdot \omega = (\varphi^*(K_{X^+}) + (n-t)F) \cdot \omega = (K_{X^+}) \cdot \varphi(\omega) - (n-t)$$

因  $2k = 2\dim E \geq \dim X = n$ , 故得

$$K_{X^+} \cdot \varphi(\omega) = n - 2t + 1 = n - 2(n-k) + 1 = 2k - n + 1 > 0$$

即  $K_{X^+} \cdot \varphi(\omega) > 0$ . 因  $\varphi(\omega)$  正好是被  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  收缩为点的那些曲线, 故  $K_{X^+}$  是  $f$ -丰富的. 因此  $f^*: X^+ \rightarrow Y$  是  $f^*: X \rightarrow Y$  的翻转.

### [参考文献]

- [1] MORI S. Flips theorem and the existence of minimal models for 3-folds[J]. J Amer Math Soc, 1988, (1): 117 - 253.
- [2] KAWAMATA Y. Small contractions of four dimensional algebraic manifolds[J]. Math Ann, 1989, 284: 595 - 600.
- [3] KACHI Y. Flips from 4-folds with isolated complete intersection singularities[J]. Amer J Math, 1998, 120: 43 - 102.
- [4] MORI S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective[J]. Ann Math, 1982, 116: 133 - 176.
- [5] KAWAMATA Y, MATSUDA K, MATSUKI K. Introduction to the minimal model problem[J]. Advan Stud Pure Math, 1987, (10): 283 - 360.
- [6] WISNIEWSKI A. On contractions of extremal rays of Fano manifolds[J]. J Reine Angew Math, 1991, 417: 141 - 157.
- [7] KLEIMAN L. Towards a numerical theory of ampleness[J]. Ann Math, 1966, 84: 293 - 344.
- [8] 苏继红, 赵逸才. 奇维数射影簇的小收缩映射的结构[J]. 中国科学 A 辑. 2006, 36(12): 1355 - 1364.
- [9] HARTSORNE R. Algebraic Geometry[M]. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [10] GRIFFITHS P, HARRIS J. Principles of Algebraic Geometry[M]. New York: Wiley Interscience Publication, 1978.

[责任编辑:王景周]