

关于 $f^m(f^{(k)})^n - \varphi$ 的值分布

李国望¹, 高凌云²

(1. 解放军炮兵学院基础部 安徽 合肥 230031; 2. 暨南大学数学系 广东 广州 510632)

[摘 要] 研究了 $f^m(f^{(k)})^n - \varphi$ 的零点的定量估计, 得到关于超越亚纯函数的特征函数的界限. 推广了 TSE C K 与 YANG C C 等人的有关结果.

[关键词] 亚纯函数; 值分布; 零点

[中图分类号] O174.52 [文献标识码] A [文章编号] 1000-9965(2008)05-0424-03

On the value distributions of $f^m(f^{(k)})^n - \varphi$

LI Guo-wang¹, GAO Ling-yun²

(1. Department of Basic Courses, Artillery Academy of PLA, Hefei 230031, China;

2. Department of Mathematics, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

[Abstract] The quantitative estimation for the number of zeros of $f^m(f^{(k)})^n - \varphi$ is investigated, and the boundary of the characteristic function of the transcendental meromorphic function is obtained. The theorem improved the relative results due to TSE C K and YANG C C.

[Key words] meromorphic function; value distribution; zeros

1 主要结果

亚纯函数结合其导数的值分布是值分布论中一个重要的研究课题. 1959年, Hayman^[1]首先提出并考虑了 $f'f$ 的值分布问题. 并猜测: 设 f 是复平面上的超越亚纯函数, 则 $f'f$ 取每一个非零有穷复值无穷多次. 1989年, 仪洪勋^[2]部分的解决了 $n=1$ 的情形, 并对 $f'f - a$ 的零点个数给出了一定量估计. 这里 a 是异于零的有穷复数. 1993年, 叶寿楨^[3]推广了仪洪勋的结果, 研究了 $f'f - a$ 的定量估计. 在此期间及其后, 许多数学工作者对 Hayman 问题做了讨论, 进行了较广泛的推广. 推广之一是让 $f'f$ 中的 f' 用 $f^{(k)}$ 甚至更一般的微分多项式来替换, 即研究形如 $f^m(f^{(k)})^n$ 的函数的值分布问题. 1994年, TSE C K 与 YANG C C^[4]在文献[4]中讨论了复平面上

的超越亚纯函数 $f^2(f^{(k)})^n$ 的值分布, 并建立了关于 $f^2(f^{(k)})^n - 1$ 的定量不等式.

本文研究了更为一般形式的 $f^m(f^{(k)})^n$ 的函数的值分布问题, 并用小函数 $\varphi(z)$ 代替有限值. 讨论了 $f^m(f^{(k)})^n - \varphi$ 的零点的较为精密的定量估计. 我们得到

定理 1.1 设 f 是一超越亚纯函数, $F = f^m(f^{(k)})^n - \varphi$, $m, k, n \in \mathbb{N}^+$, $\varphi \neq 0$ 是 f 的一个小函数, 即 $T(r, \varphi) = S(r, f)$, 当 $k \geq 1, m, n \geq 2$ 时, 则

$$mT(r, f) \leq \left[1 + \frac{2}{n(k+1)} \right] \left\{ \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \right\} + S(r, f).$$

推论 1.1 设条件如定理 1.1 所设, 则

$$(m-1)T(r, f) \leq \left[1 + \frac{2}{n(k+1)}\right] \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f).$$

推论 1.2 设条件如定理 1.1 所设,且 $m, n \geq 2$ 当 $k \geq 2$ 时,则由推论 1.1 得

$$T(r, f) \leq \frac{4}{3} \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f).$$

注: TSE C K 与 YANG C C 在文献[4]中对推论 1.2 中的 F 证明了当 $k \geq 2$ 时,

$$T(r, f) \leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f)$$

本文采用亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论的通常记号和基本结果^[5]. 并设 $S(r, f)$ 表示适合 $S(r, f) = o(T(r, f)) (r \rightarrow \infty)$ 的任意量,可能须除去一个线性测度为有穷的 r 值集合 E .

2 几个引理

引理 2.1^[5] 设 $f(z)$ 是超越亚纯函数, k 是任意正整数,则 $m(r, f^{(k)}/f) = S(r, f)$.

引理 2.2^[6] 设 $Q_1(f)$ 和 $Q_2(f)$ 是两个关于 f 的微分多项式,满足 $f^m Q_1(f) = Q_2(f)$. 则当 $n \geq \gamma_{Q_2}$ 时, $m(r, Q_1(f)) = S(r, f)$. 这里 γ_{Q_2} 表示 $Q_2(f)$ 的次数.

令 $F = f^m (f^{(k)})^n - \varphi$, 则 $\frac{F}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} f^m (f^{(k)})^n - 1$,

记 $F_1 = F/\varphi$.

引理 2.3 设 f 和 F_1 如上面所定义,在定理 1.1 的条件下,又设

$$G = (f^{(k)})^{n-1} \left\{ \frac{F'_1}{F_1} \frac{f^{(k)}}{\varphi} - \left(\frac{1}{\varphi} \right)' f^{(k)} - \frac{m}{\varphi} \frac{f'}{f} f^{(k)} - \frac{n}{\varphi} f^{(k+1)} \right\}. \quad (2.1)$$

则 (i) $T(r, G) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f)$.

(ii) $nT(r, f^{(k)}) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) +$

$$N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + (1-m)\bar{N}(r, f) + S(r, f).$$

证明 (i) 由 F_1 和 F 的表达式,可得

$$\left(\frac{F}{\varphi}\right)' = \left(\frac{1}{\varphi}\right)' f^m (f^{(k)})^n + \frac{m}{\varphi} f^{m-1} f' (f^{(k)})^n + \frac{n}{\varphi} f^m (f^{(k)})^{n-1} f^{(k+1)} = \frac{F'_1}{F_1} \frac{f^{(k)}}{\varphi} - \frac{F'_1}{F_1}.$$

由上式及(2.1)可推得

$$f^m G = F'_1 / F_1. \quad (2.2)$$

可以证明 $G \neq 0$. 否则,由(2.2)有 $F_1 = c$ (常数). 从 $F_1 = F/\varphi$ 和 F 的表达式知,

$$f^m (f^{(k)})^n = (c+1)\varphi. \quad (2.3)$$

由上式知 $N(r, f^{(k)}) \leq N(r, \varphi) = S(r, f)$, 又对(2.5)应用引理 2.2, 得 $m(r, f^{(k)}) = S(r, f)$, 于是, $T(r, f^{(k)}) = S(r, f)$, 这与 f 是超越亚纯函数矛盾, 故 $G \neq 0$.

由 G 的表达式,应用引理 2.2, 可得

$$m(r, G) = S(r, f). \quad (2.4)$$

下面估计 $N(r, G)$. 由 G 的表达式知, G 的极点只可能来自 F_1 与 f 的零点,或是 φ 的零点和极点. 我们断言 f 的极点不产生 G 的极点. 事实上,设 z_0 是 f 的一个 τ 级极点,则它是 f^m 的一个 $m\tau$ 级极点,考虑到 F'_1/F_1 仅有单级极点与零点,因此由(2.2)知 f 的任一极点均不是 G 的极点. 注意到 $N(r, \varphi) + N(r, 1/\varphi) = S(r, f)$, 从而

$$\begin{aligned} N(r, G) &\leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F_1}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r, \varphi) + \\ &N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f). \end{aligned} \quad (2.5)$$

另一方面,从(2.2)还可推得

$$\begin{aligned} N(r, G) &\geq N(r, f^m) - \bar{N}(r, f) = \\ &mN(r, f) - \bar{N}(r, f). \end{aligned} \quad (2.6)$$

结合(2.4)和(2.5)得

$$T(r, G) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f). \quad (2.7)$$

(ii) 由式(2.1)知 $G = (f^{(k)})^n \left\{ \frac{F'_1}{F_1} \frac{1}{\varphi} - \left(\frac{1}{\varphi}\right)' - \frac{m}{\varphi} \frac{f'}{f} - \frac{n}{\varphi} \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}} \right\}$,

由引理 2.1, 有 $m\left(r, \frac{F'_1}{F_1}\right) = S(r, F_1) =$

$$o(T(r, F_1)) = o(T(r, f)).$$

又 $m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) = S(r, f^{(k)}) = o\{T(r, f^{(k)})\} = o\{T(r, f)\}$.

故

$$m \cdot m\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) = m\left(r, \frac{1}{(f^{(k)})^n}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{G}\right) +$$

$$S(r, f) = T(r, G) - N(r, \frac{1}{G}) + S(r, f).$$

$$(2.8)$$

结合(2.1)和(2.6)可得

$$N\left(r, \frac{1}{G}\right) \geq (n-1)N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + mN(r, f) - \bar{N}(r, f). \quad (2.9)$$

把(2.7)和(2.9)代入(2.8)得

$$\begin{aligned} nT(r, f^{(k)}) &\leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) - \\ &\quad mN(r, f) + \bar{N}(r, f) + S(r, f) \\ &\leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + \\ &\quad (1-m)\bar{N}(r, f) + S(r, f). \end{aligned} \quad (2.10)$$

于是引理2.3得证.

3 定理的证明

定理1.1的证明 设 G 如(2.1)所设,由(2.2)可得

$$\begin{aligned} m \cdot m(r, f) &= m(r, f^m) = m\left(r, \frac{1}{G F_1}\right) \leq \\ &\quad m\left(r, \frac{1}{G}\right) + m\left(r, \frac{F'_1}{F_1}\right) \leq T(r, G) - \\ &\quad N\left(r, \frac{1}{G}\right) + S(r, f). \end{aligned}$$

将引理2.3(i)和(2.9)代入上式,得

$$\begin{aligned} m \cdot m(r, f) &\leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \\ &\quad (n-1)N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) - mN(r, f) + \\ &\quad \bar{N}(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} mT(r, f) &\leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \\ &\quad (n-1)N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + \bar{N}(r, f) + S(r, f). \end{aligned} \quad (3.1)$$

结合引理2.3(ii)和(3.1)有

$$\begin{aligned} nT(r, f^{(k)}) &\leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \\ &\quad (2-n)N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) + (2-m)\bar{N}(r, f) - \\ &\quad mT(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

由已知条件 $m, m \geq 2$,因而 $2-m \leq 0, 2-n \leq 0$,所以有

$$\begin{aligned} nT(r, f^{(k)}) &\leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \\ &\quad S(r, f). \end{aligned} \quad (3.2)$$

注意到

$$T(r, f^{(k)}) \geq N(r, f^{(k)}) = N(r, f) + k\bar{N}(r, f) \geq (k+1)\bar{N}(r, f).$$

将此代入到(3.2)得

$$\begin{aligned} \bar{N}(r, f) &\leq \frac{2}{n(k+1)} \left\{ \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \right. \\ &\quad \left. \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \right\} + S(r, f). \end{aligned} \quad (3.3)$$

结合(3.1)和(3.3)得

$$\begin{aligned} mT(r, f) &\leq \left[1 + \frac{2}{n(k+1)} \right] \left\{ \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \right. \\ &\quad \left. \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \right\} + S(r, f). \end{aligned} \quad (3.4)$$

定理1.1得证.

推论1.1的证明 由(3.4)还可推得

$$\begin{aligned} (m-1)T(r, f) &\leq \left[1 + \frac{2}{n(k+1)} \right] \bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \\ &\quad S(r, f). \end{aligned}$$

推论1.1得证.

[参考文献]

- [1] HAYMAN W K. Research problems function and their derivatives [J]. Ann of Math, 1959, 70(2): 9-42.
- [2] 仪洪勋. 关于 $f'f$ 的值分布[J]. 科学通报, 1989, 34(10): 727-730.
- [3] 叶寿桢. 关于 $f'f''$ 值分布的一个定理[J]. 河北师范大学学报:自然科学版, 1993, (4): 7-8.
- [4] TCE C K, YANG C C. On the value distribution of $f^{(k)}$ [J]. Kodai Math. 1994, 17: 163-169.
- [5] HAYMAN W K. Meromorphic Functions [M]. Oxford: Oxford University Press, 1964.
- [6] CLUNIE J. On integral and meromorphic functions [J]. London Math Soc, 1962, 37: 17-27.

[责任编辑:王景周]