

双层双曲抛物面网壳结构的非线性稳定性

徐加初, 区潮益

(暨南大学力学与土木工程系, 广东 广州 510632)

[摘 要] 基于等效夹层壳思想的双层网格扁壳非线性弯曲理论, 对鞍形双层双曲抛物面网格壳体在均布压力作用下的非线性稳定性问题进行了研究, 采用伽辽金方法求得了简支边界条件下双层双曲抛物面网格壳的非线性载荷-位移关系式和临界屈曲载荷的解析表达式, 同时讨论了网壳结构几何参数对临界屈曲载荷的影响。

[关键词] 双层双曲抛物面网格壳; 夹层扁壳; 非线性稳定性

[中图分类号] O343.9 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1000-9965(2008)05-0434-04

Nonlinear buckling of hyperbolic parabolic double-deck reticulated shallow shells

XU Jia-chu, QU Chao-yi

(Department of Mechanics and Civil Engineering, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

[Abstract] Based on the nonlinear bending theory of double-deck reticulated shallow shells, the nonlinear buckling problem of hyperbolic parabolic double-deck reticulated shallow shells under uniform transverse pressure is studied. An analytic solution for movable clamped edges is obtained by use of Galerkin's method. The results of numerical calculations are presented in diagrams, which show the influence of geometrical parameters on the buckling behavior.

[Key words] hyperbolic parabolic double-deck reticulated shallow shell; sandwich shallow shell; nonlinear stability

双曲抛物面网壳以其独有的空间活跃, 曲面优美, 布置灵活, 受力合理等特点倍受人们的青睐。对网壳结构进行分析主要有两种方法: 离散的有限元方法和等效的连续化方法。离散的有限元法可以对结构的荷载-位移全过程进行分析, 沈世钊^[1]、赵阳^[2]、刘大卫^[3]、朱忠义^[4]等在这方面作了大量工作。网壳结构本身是一种离散结构, 采用离散法具有分析方法直观、精确度高等优点, 但当网格结构比较复杂、网格分布稠密、节点数目大的情况下, 离散方法显得耗时费力, 在分析结构的稳定、振动时尤为繁重。因此离散化方法的适应性和计算效率难以满

足工程设计单位的需要。等效连续化方法则有涉及参数少、计算工作量小、物理意义明确等优点, 在进行复杂网壳结构的稳定、振动分析时跟离散有限元法相比有较大优越性。20世纪90年代, 刘人怀、聂国华^[5-8]采用等效连续化方法建立单层网格扁壳的非线性理论, 之后, 刘人怀、肖潭等^[9-10]利用等效夹层壳思想将这一方法推广到双层网壳结构中, 建立双层网壳结构的非线性理论。在文献[9]中, 将双层网格壳的弦杆等效成夹层壳的表层, 腹杆等效成夹层壳的夹心。基于这一理论, 刘人怀、肖潭和徐加初^[10-12]对双曲双层网格扁壳和双层柱面网格扁壳

[收稿日期] 2008-04-21

[基金项目] 国家自然科学基金(19972024)

[作者简介] 徐加初(1964-), 男, 副教授, 博士, 研究方向: 板壳非线性力学

的非线性稳定和 nonlinear 振动问题进行了研究

本文基于双层网格扁壳的非线性理论^[9],对正交正放双层双曲面网格壳体在均布压力作用下的非线性稳定问题进行分析,得到了简支边界条件下临界载荷的解析表达式。

1 基本方程

如图1所示的双层双曲抛物面网壳结构,设网壳结构的长和宽分别是 a 和 b ,垂度分别是 f_1 和 f_2 。矩形平面双层双曲抛物面网壳的曲面方程为

$$z_0 = -\frac{(2x-a)^2}{a^2}f_1 + \frac{(2y-b)^2}{b^2}f_2 \quad (1)$$

则 x 方向和 y 方向的曲率分别是

$$k_x = \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} = -\frac{8f_1}{a^2}, \quad k_y = \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = \frac{8f_2}{b^2} \quad (2)$$

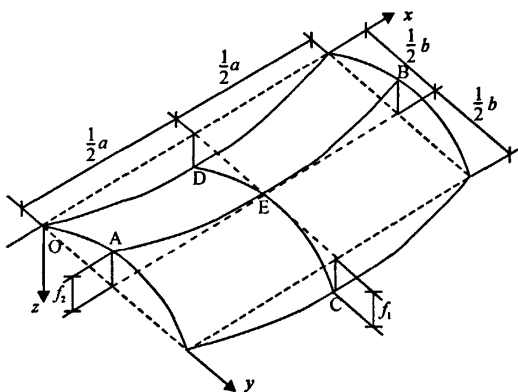


图1 双层双曲抛物面网壳结构示意图

根据文献[9]并使用相同的符号,双层柱面网格扁壳在均布压力 q 作用下以中面挠度 w 、中面法线转角 ψ_x 和 ψ_y ,以及应力函数 ϕ 为未知量的大挠度控制方程为

$$\begin{cases} D_x \psi_{x,xx} + D_y \psi_{y,yy} + 2D_{xy}(\psi_{y,xy} + \psi_{x,xy}) + \\ \phi_{,yy}(w_{,xx} + k_y) - 2\phi_{,xy}w_{,xy} + \\ \phi_{,xx}(w_{,yy} + k_x) + q = 0 \\ D_x \psi_{x,xx} + D_{xy}(\psi_{y,xy} + \psi_{x,xy}) = G_x(\psi_x + w_{,x}) \\ D_{xy}(\psi_{y,xy} + \psi_{x,xy}) + D_y \psi_{y,yy} = G_y(\psi_y + w_{,y}) \\ \frac{\phi_{,yyy}}{E_x} + \frac{\phi_{,xxx}}{E_y} + \frac{\phi_{,xyy}}{G_{xy}} = (w_{,xy})^2 - w_{,xx}w_{,yy} - \\ k_x w_{,xx} - k_y w_{,yy} \end{cases} \quad (3)$$

结合工程实际结构的支承形式,本文研究双层双曲抛物面网壳结构的边缘为可移简支的边界支承情况,其边界条件可表示成

$$\text{当 } x=0, a \text{ 时, } N_x = N_{xy} = 0, w = 0, M_x = 0, \psi_y = 0;$$

$$\text{当 } y=0, b \text{ 时, } N_y = N_{xy} = 0, w = 0, M_y = 0, \psi_x = 0 \quad (4)$$

为了研究问题的方便,引入下列无量纲参量

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad \Psi_\xi = H\psi_x,$$

$$\Psi_\eta = H\psi_y, \quad F = \frac{\phi}{E_y h^2}, \quad Q = \frac{q a^4}{D_x h},$$

$$\lambda = \frac{a}{b}, \quad H = \frac{a}{h}, \quad k_1 = \frac{a^2 k_x}{h}, \quad k_2 = \frac{a^2 k_y}{h},$$

$$d_1 = \frac{D_y}{D_x}, \quad d_2 = \frac{D_{xy}}{D_x}, \quad d_3 = \frac{G_x a^2}{D_x}, \quad d_4 = \frac{G_y a^2}{D_x},$$

$$d_5 = \frac{E_x}{E_y}, \quad d_6 = \frac{E_y}{G_{xy}}, \quad d_7 = \frac{E_y h^2}{D_x} \quad (5)$$

借助于上述无量纲参量,方程式(3)和边界条件(4)的无量纲形式分别是

$$\begin{aligned} & \Psi_{\xi,\xi\xi\xi} + d_1 \lambda^3 \Psi_{\eta,\eta\eta\eta} + 2d_2 \lambda (\Psi_{\eta,\xi\xi\eta} + \lambda \Psi_{\xi,\xi\eta\eta}) + \\ & d_7 [\lambda^2 F_{,\eta\eta} (W_{,\xi\xi} + k_2) - 2\lambda^2 F_{,\xi\eta} W_{,\xi\eta} + \\ & F_{,\xi\xi} (\lambda^2 W_{,\eta\eta} + k_1)] + Q = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Psi_{\xi,\xi\xi} + d_2 \lambda (\Psi_{\eta,\xi\eta} + \lambda \Psi_{\xi,\eta\eta}) = d_3 (\Psi_\xi + W_{,\xi}) \quad (7)$$

$$d_2 (\Psi_{\eta,\xi\xi} + \lambda \Psi_{\xi,\xi\eta}) + d_1 \lambda^2 \Psi_{\eta,\eta\eta} = d_4 (\Psi_\eta + \lambda W_{,\eta}) \quad (8)$$

$$F_{,\xi\xi\xi} + d_5 \lambda^4 F_{,\eta\eta\eta\eta} + \lambda^2 [d_6 F_{,\xi\xi\eta\eta} - (W_{,\xi\eta})^2 + W_{,\xi\xi} W_{,\eta\eta} + k_2 W_{,\xi\eta}] + k_1 W_{,\xi\xi} = 0 \quad (9)$$

$$\text{当 } \xi=0, 1 \text{ 时, } W = \Psi_\eta = \Psi_{\xi,\xi} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (10)$$

$$\text{当 } \xi=0, 1 \text{ 时, } W = \Psi_\xi = \Psi_{\eta,\eta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (11)$$

2 非线性边值问题的求解

采用伽辽金方法对可移简支边界条件下的无量纲非线性边值问题(6)~(11)进行求解。对双层双曲抛物面网壳结构进行单模态分析,设相应的屈曲模态为

$$W = W_0 U(\xi) V(\eta) \quad (12)$$

这里 W_0 表示网壳中点处的无量纲挠度,

$$U(\xi) = \sin \pi \xi, \quad V(\eta) = \sin \pi \eta \quad (13)$$

由方程(7)和(8)求得

$$\Psi_\xi = A W_0 U'(\xi) V(\eta), \quad \Psi_\eta = B W_0 U(\xi) V'(\eta) \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \frac{d_2 d_4 \lambda^2 \pi^4 - d_3 \pi^2 (d_2 \pi^2 + d_1 \lambda^2 \pi^2 + d_4)}{\pi^2 (\pi^2 + d_2 \lambda^2 \pi^2 + d_3) (d_2 \pi^2 + d_1 \lambda^2 \pi^2 + d_4) - d_2^2 \lambda^2 \pi^6} \\ B &= \frac{d_2 d_3 \lambda \pi^4 - d_4 \lambda \pi^2 (\pi^2 + d_2 \lambda^2 \pi^2 + d_3)}{\pi^2 (\pi^2 + d_2 \lambda^2 \pi^2 + d_3) (d_2 \pi^2 + d_1 \lambda^2 \pi^2 + d_4) - d_2^2 \lambda^2 \pi^6} \end{aligned}$$

设方程(9)的解是

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} F_{kl} X_k(\xi) Y_l(\eta) \quad (15)$$

其中 $X_k(\xi)$ 、 $Y_l(\eta)$ 为梁的本征函数

$$\begin{aligned} X_k(\xi) &= \text{ch}\alpha_k \xi - \cos\alpha_k \xi - \gamma_k (\text{sh}\alpha_k \xi - \sin\alpha_k \xi) \\ Y_l(\eta) &= \text{ch}\alpha_l \eta - \cos\alpha_l \eta - \gamma_l (\text{sh}\alpha_l \eta - \sin\alpha_l \eta) \\ k, l &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

由边界条件(10)和(11)可知 α_k 、 γ_k 需满足如下关系

$$\begin{aligned} 1 - \text{ch}\alpha_k \cos\alpha_k &= 0 \\ \gamma_k &= \frac{\text{ch}\alpha_k - \cos\alpha_k}{\text{sh}\alpha_k - \sin\alpha_k} \end{aligned} \quad (17)$$

对方程(9)进行伽辽金积分,得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \{ F_{,\xi\xi\xi\xi} + d_5 \lambda^4 F_{,\eta\eta\eta\eta} + \lambda^2 [d_6 F_{,\xi\xi\eta\eta} - \\ (wm_{,\xi\eta})^2 + W_{,\xi\xi} W_{,\eta\eta} + k_2 W_{,\eta\eta}] + \\ k_1 W_{,\xi\xi} \} X_i Y_j d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

经过一系列的计算,得到关于 F_{kl} 的线性方程组

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} g_{1kl} F_{kl} = g_{2j} W_0^2 + g_{3j} W_0 \quad (19)$$

其中

$$g_{1kl} = \int_0^1 \int_0^1 (X_k^{(4)} Y_l + d_5 \lambda^4 X_k Y_l^{(4)} + \lambda^2 d_6 X_k'' Y_l'') X_i Y_j d\xi d\eta$$

$$g_{2j} = \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 [(U'V')^2 - (U''VU'')'] X_i Y_j d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned} g_{3j} &= - \int_0^1 \int_0^1 (K_2 \lambda^2 UV'' + K_1 U''V) X_i Y_j d\xi d\eta \\ (k, l, i, j &= 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (20)$$

从线性方程组(19)可以解得

$$F_{kl} = f_{1kl} W_0^2 + f_{2kl} W_0 \quad (21)$$

对方程(6)进行伽辽金积分,得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \{ \Psi_{,\xi\xi\xi\xi} + d_1 \lambda^3 \Psi_{,\eta\eta\eta\eta} + 2d_2 \lambda (\Psi_{,\xi\xi\eta\eta} + \\ \lambda \Psi_{,\xi\eta\eta\eta}) + d_7 [\lambda^2 F_{,\eta\eta} (W_{,\xi\xi} + k_2) - \\ 2\lambda^2 F_{,\xi\eta} W_{,\xi\eta} + F_{,\xi\xi} (\lambda^2 W_{,\eta\eta} + k_1)] + \\ Q \} UV d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

经过一系列繁琐的运算后,得到无量纲均布压力 Q 与网壳无量纲中心挠度 W_0 的关系

$$Q = I_1 W_0 + I_2 W_0^2 + I_3 W_0^3 \quad (23)$$

其中

$$I_1 = \frac{\beta_1}{\beta_4}, I_2 = \frac{\beta_2}{\beta_4}, I_3 = \frac{\beta_3}{\beta_4} \quad (24)$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 由下式给出

$$\beta_1 = - \int_0^1 \int_0^1 [AU^{(4)}V + d_1 \lambda^3 BUV^{(4)} + 2d_2 \lambda (B +$$

$$\lambda A)UV''V''] + d_7 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda^2 K_2 f_{2kl} X_k Y_l'' + K_1 f_{2kl} X_k'' Y_l) UV d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= - \int_0^1 \int_0^1 d_7 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda^2 f_{2kl} X_k Y_l'' U''V'' + \\ &\lambda^2 K_2 f_{1kl} X_k Y_l'' - 2\lambda^2 f_{2kl} X_k' Y_l' U''V'' + \\ &\lambda^2 f_{2kl} X_k'' Y_l UV'' + K_1 f_{1kl} X_k'' Y_l) UV d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= - \int_0^1 \int_0^1 d_7 \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (f_{1kl} X_k Y_l'' U''V - \\ &2f_{1kl} X_k' Y_l' U''V' + f_{1kl} X_k'' Y_l UV'') UV d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\beta_4 = \int_0^1 \int_0^1 \sin\pi\xi \sin\pi\eta d\xi d\eta$$

将式(23)转化成有量纲形式

$$q = J_1 w_0 + J_2 w_0^2 + J_3 w_0^3 \quad (25)$$

其中

$$J_1 = \frac{D}{a^4} I_1, \quad J_2 = \frac{D}{a^4 h} I_2, \quad J_3 = \frac{D}{a^4 h^2} I_3$$

根据驻值条件 $\frac{dq}{dw_0} = 0$, 由式(25)可以得到网壳

结构失稳时的挠度:

$$w_{cr} = \frac{-J_2 \pm \sqrt{J_2^2 - 3J_1 J_3}}{3J_3} \quad (26)$$

式中的正号和负号分别对应着上临界载荷和下临界载荷,将 w_{cr} 代入式(25)可以得到网壳结构失稳时的临界载荷表达式

$$q_{cr} = J_1 w_{cr} + J_2 w_{cr}^2 + J_3 w_{cr}^3$$

3 数值算例

设一大型双层正交正放双曲抛物面网壳结构的有关参数如下:

网壳底面边长 $a = 100$ m, 宽 $b = 80$ m, 网壳单元的弦杆尺寸 L_1 和 L_2 均为 0.8 m, 弦杆采用 $\Phi 189 \times 6$ mm 的圆钢管, 腹杆和斜杆采用 $\Phi 168 \times 5.5$ mm 的圆钢管, 网壳厚度 $h = 0.8$ m, 所有杆件的弹性模量 $E = 1.9 \times 10^5$ MPa, 剪切模量 $G = 7.6 \times 10^4$ MPa.

对于正交正放双层双曲抛物面网壳结构, 考虑在均布载荷作用下, 对其进行分析计算. 在实际计算中, 式(15)总是截取前有限项. 根据对实际计算结果的比较, 在式(15)取 4 项进行计算具有相当的精度.

结合相关的建筑设计规范, 分别取 5 组不同的曲率进行计算:

- ① $k_1 = -0.010, k_2 = 0.010$;
- ② $k_1 = -0.015, k_2 = 0.015$;
- ③ $k_1 = -0.020, k_2 = 0.020$;
- ④ $k_1 = -0.025, k_2 = 0.025$;

⑤ $k_1 = -0.030, k_2 = 0.030$.

图2给出了不同曲率组别下均布载荷 q 与网壳中心挠度 w_0 的特征关系曲线. 从图2可以看出, 当曲率 k_1, k_2 值的绝对值较小时 (如曲率组别①和②), 壳体比较扁平, 载荷—挠度曲线是单调增加的, 壳体不会出现明显的屈曲现象; 当曲率 k_1, k_2 的绝对值较大时 (如曲率组别③、④和⑤), 壳体发生屈曲.

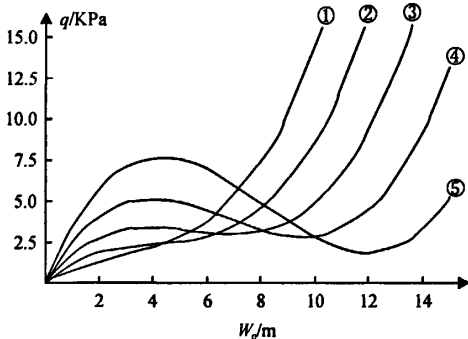


图2 在不同曲率组别时的载荷—挠度曲线

图3给出当 x 方向的曲率 $k_1 = -0.02$ 时, y 方向的曲率 k_2 取不同值时的的载荷—挠度曲线. 从图3可以看出, 当 k_1 不变时, 上临界载荷是随着 k_2 的增大而增大. 并且, 当曲率 k_2 值较小时, 壳体比较扁平, 载荷—挠度曲线是单调增加的, 壳体不会出现明显的屈曲现象; 当曲率 k_2 较大时, 壳体发生屈曲, 壳体的上临界载荷 q_{cr1} 会随着曲率 k_2 的增大而增大.

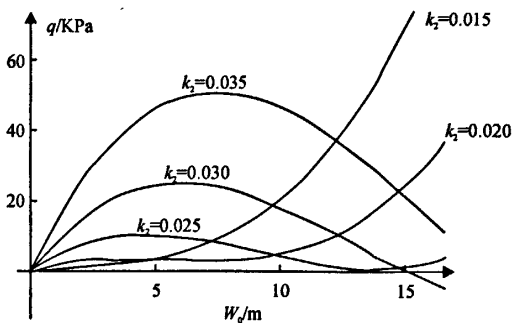


图3 $k_1 = -0.02$ 时, 不同曲率 k_2 下的载荷—挠度曲线

图4给出当 y 方向的曲率 $k_2 = 0.02$ 时, x 方向的曲率 k_1 取不同值时的的载荷—挠度曲线. 从图4可以看出, 当 k_2 不变时, 上临界载荷是随着 k_1 的增大而减小. 并且当曲率 k_1 的绝对值较大时, 载荷—挠度曲线是单调增加的, 壳体不会出现明显的屈曲

现象; 当曲率 k_1 的绝对值较小时, 壳体会发生屈曲, 壳体的上临界载荷 q_{cr1} 会随着曲率 k_1 的绝对值减小而增大, 下临界载荷 q_{cr2} 会随着曲率 k_1 的绝对值的减小而减小.

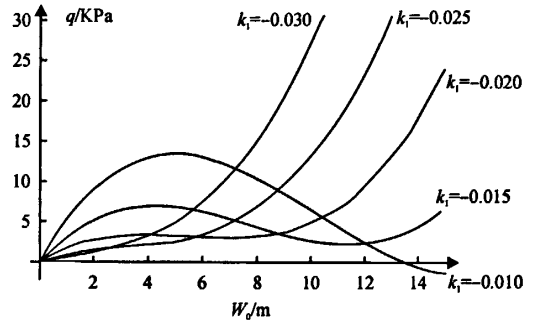


图4 $k_2 = 0.02$ 时, 不同曲率 k_1 下的载荷—挠度曲线

[参考文献]

- [1] 沈世钊, 陈 昕. 网壳结构稳定[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [2] 赵 阳, 董石麟. 组合网壳的几何非线性稳定分析[J]. 空间结构, 1994, 1(2): 17-22.
- [3] 刘大卫, 董石麟. 大型柱面网壳的非线性稳定性分析[J]. 空间结构, 1995, 1(3): 14-19.
- [4] 朱忠义, 董石麟. 球面组合网壳结构的几何非线性稳定性分析[J]. 空间结构, 1996, 2(1): 1-7.
- [5] LIU Ren-huai, LI Dong, NIE Guo-hua, et al. Nonlinear-Linear Buckling of squarely latticed shallow spherical shells[J]. Int J Nonlinear Mech, 1991, 26(5): 547-558.
- [6] 刘人怀, 聂国华. 矩形网格扁壳结构的非线性弯曲理论[J]. 江西工业大学学报, 1991, 13(2): 186-192.
- [7] 聂国华, 刘人怀, 翁志远. 网格扁壳结构的非线性弯曲和稳定问题研究[J]. 上海力学, 1994, 15(2): 17-27.
- [8] 聂国华, 刘人怀. 矩形网格扁壳结构的非线性弹性理论[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(5): 413-423.
- [9] 刘人怀, 肖 潭. 双层正交正放网格扁壳的非线性弯曲理论[C]. 现代力学与科技进步, 北京: 清华大学出版社, 1997, 1212-1215.
- [10] 刘人怀, 肖 潭. 矩形底双层网格扁壳的非线性屈曲[J]. 暨南大学学报: 自然科学版, 1999, 20(1): 1-5.
- [11] 肖 潭. 矩形底双层网格扁壳的非线性振动分析[J]. 暨南大学学报: 自然科学版, 2000, 21(5): 13-19.
- [12] 徐加初, 肖潭, 刘人怀. 双层柱面网格扁壳的非线性稳定性分析[J]. 工程力学, 2004, 21(2): 20-24.

[责任编辑: 王景周]