

中心集中荷载和温度场联合作用下的扁球壳的屈曲

朱永安¹, 王璠²

(暨南大学 1. 基建处 2. 应用力学研究所, 广东 广州 510632)

[摘要] 利用修正迭代法研究了扁球壳在集中荷载和温度场联合作用下的非线性屈曲问题, 得到了临界荷载的二次近似解析公式, 讨论了温度场对临界荷载和临界几何参数的影响。

[关键词] 扁球壳; 屈曲; 修正迭代法; 温度场

[中图分类号] O343.9 [文献标识码] A [文章编号] 1000-9965(2008)05-0438-05

Buckling of shallow spherical shell under concentrated load and temperature field

ZHU Yong-an¹, WANG Fan²

(1. Infrastructure Construction Department, Jinan University, Guangzhou 510632, China;

2. Institute of Applied Mechanics, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

[Abstract] The nonlinear buckling of shallow spherical shell under concentrated load and temperature field is studied by the modified iteration method, and the analytic formulas for determining the critical buckling load is obtained. The effect of temperature field on critical buckling load and critical geometrical parameter are discussed.

[Key words] shallow spherical shell; buckling; modified iteration method; temperature field

薄壁壳体是重要的工程结构之一, 在使用中, 按照设计要求需要核算其稳定性。这对于选择材料及结构的尺寸十分重要, 在建筑和精密仪器的弹性元件等工程中, 常使用边缘固定的扁球壳, 这种壳体在中心集中荷载作用时, 在一定条件下会丧失稳定性。对于建筑工程, 要防止失稳现象的发生, 对于精密仪器, 要利用失稳所产生的跳跃作为自动控制的信号。对于扁球壳在机械荷载作用下的屈曲问题, 刘人怀^[1-3], 王璠^[4-5]等进行了研究, 对于双层扁球壳的热屈曲问题, 刘人怀^[6]、罗祖道^[7]等学者对双层扁

球壳在温度场作用下的热屈曲问题进行了研究, 而对于扁球壳在中心集中荷载和温度场联合作用下的屈曲问题尚未见报道, 本文研究扁球壳在中心集中荷载和温度场联合作用下的屈曲问题。

1 边值问题的建立

考虑如图1所示的扁球壳, 外边缘夹紧固定, 这里, R 为中曲面半径, r 为中曲面点至对称中心轴的距离, α 为外边缘半径, h 为厚度。

该扁球壳承受集中荷载 P 和面内温度场 T 的

[收稿日期] 2008-05-14

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(10572054) 教育部科学技术研究重点项目(106156)

[作者简介] 朱永安(1979-), 男, 硕士研究生, 研究方向: 板壳力学。E-mail: senhong@163.com;

通讯作者: 王璠(1958-), 教授, 博士, 研究方向: 复合材料结构力学, E-mail: twfan@jnu.edu.cn

联合作用,此温度场可表示为

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{r}{a} \quad (1)$$

其中, T_1 是壳体中心的温度, T_2 是壳体外边缘的温度.

在壳体中截取如图 2 所示的壳体单元,根据其受力情况,可得平衡方程

$$\begin{aligned} \frac{d(rN_r)}{dr} - N_\theta &= 0 \\ \frac{d(rM_r)}{dr} - M_\theta - rQ_r &= 0 \end{aligned} \quad (2a, b)$$

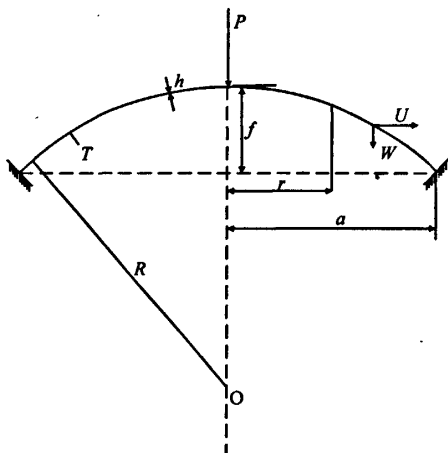


图1 集中荷载和温度场作用下的扁球壳

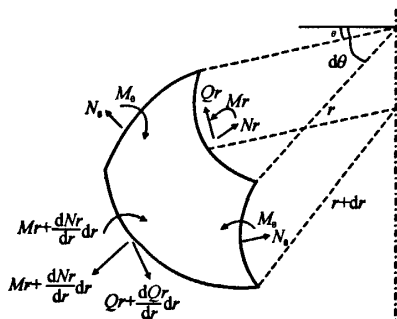


图2 壳体单元

用圆锥面沿半径为 r 的圆周从壳体切割如图 3 所示的部分壳体,将这部分壳体上的全部力投影到对称轴上,有

$$2\pi r [Q_r \cos(\theta + \vartheta) + N_r \sin(\theta + \vartheta)] + P = 0 \quad (3)$$

ϑ 和 θ 分别是壳体经线方向弧的旋转角和倾斜角,其中

$$\vartheta = \frac{dw}{dr}, \theta = \frac{r}{R} \quad (4)$$

根据角 $(\theta + \vartheta)$ 微小的条件,式(3)可简化

$$r [Q_r + N_r(\theta + \vartheta)] = -\frac{P}{2\pi} \quad (5)$$

这样,式(2)和(5)便构成了壳体的平衡方程.

轴对称条件下,与壳体中曲面相距为 z 的任意一点 k (图 4) 的径向、环向和轴向位移可表示为

$$u^{(k)} = u + z\phi, \quad v^{(k)} = 0, \quad w^{(k)} = w \quad (6)$$

其中, u 和 w 分别是壳体中曲面上点的径向位移和挠度, ϕ 为壳体变形前的中曲面法线的转角.

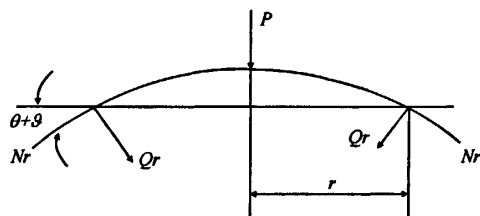


图3 部分壳体

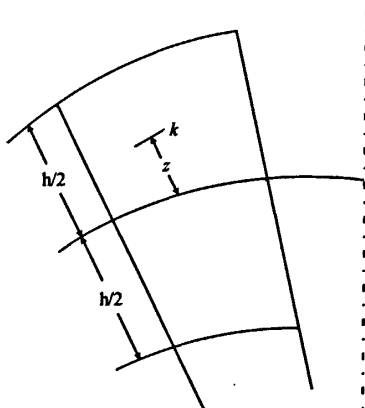


图4 壳体截面

将这些表达式代入以下第 k 点的几何方程

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(k)} &= \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} + \frac{r}{R} \frac{dw^{(k)}}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dr} \right)^2 \\ \varepsilon_\theta^{(k)} &= \frac{u^{(k)}}{r} \end{aligned} \quad (7)$$

则第 k 点的应变为:

$$\varepsilon_r^{(k)} = \varepsilon_r + z k_r, \quad \varepsilon_\theta^{(k)} = \varepsilon_\theta + z k_\theta \quad (8)$$

其中, ε_r 和 ε_θ 分别是中曲面上的径向和环向应变, k_r 和 k_θ 分别是中曲面上的径向和环向曲率,

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{r}{R} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r},$$

$$k_r = \frac{d\phi}{dr}, \quad k_\theta = \frac{\phi}{r} \quad (9a, b, c, d)$$

本问题中,壳体第 k 点处的 Hooke 定律为

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(k)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r^{(k)} + \nu \varepsilon_\theta^{(k)}) - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \\ \sigma_\theta^{(k)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta^{(k)} + \nu \varepsilon_r^{(k)}) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}\end{aligned}\quad (10)$$

其中, E 是弹性模量, ν 是泊松比, α 是线膨胀系数.

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r^{(k)} dz, \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta^{(k)} dz, \quad (11)$$

利用式(9)、(10)和(11),可得

$$\begin{aligned}N_r &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) - \frac{E\alpha Th}{1-\nu}, \\ N_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) - \frac{E\alpha Th}{1-\nu}\end{aligned}\quad (12)$$

由式(12)得:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{Eh} (N_r - \nu N_\theta) + \alpha T, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_r) + \alpha T\end{aligned}\quad (13)$$

由(9a,b)可得:

$$\varepsilon_r = \frac{d(r\varepsilon_\theta)}{dr} + \frac{r}{R} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \quad (14)$$

将(13)代入(14),并结合(1)和(2),可得

$$\begin{aligned}\frac{r}{Eh} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \vartheta \left(\vartheta + \frac{1}{2} \vartheta^2 \right) = \\ \alpha (T_1 - T_2) \frac{r}{a}\end{aligned}\quad (15)$$

本问题中, 径向薄膜位移 u , 径向弯矩 M_r 和径向剪力 Q_r 可表示如下^[1]:

$$\begin{aligned}u &= \frac{r}{Eh} \left[(1-\nu) N_r + r \frac{dN_r}{dr} \right], \\ M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ Q_r &= -D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right)\end{aligned}\quad (16a, b, c)$$

其中, D 是抗弯刚度, 且 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ (17)

将(16c)代入(5),可得

$$Dr \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\vartheta) - rN_r (\vartheta + \vartheta^2) = \frac{P}{2\pi} \quad (18)$$

则式(15)和式(18)就构成扁球壳在中心集中载荷和温度场联合作用下的轴对称大挠度方程.

边界条件为:

当 $r=a$ 时, $w=0, \frac{dw}{dr}=0, u=0$;

当 $r=0$ 时, $\frac{dw}{dr}=0, N_r$ 有限 (19)

为简化求解, 引入以下无量纲量

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \gamma = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{w}{h} + \frac{1}{2} k\rho^2,$$

$$\varphi = -\frac{dy}{d\rho}, \quad k = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{a^2}{Rh}, \quad s = \frac{a^2}{D} \rho N_r,$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad Q = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{a^4 q}{Dh},$$

$$\lambda = \frac{12\alpha(T_1 - T_2)a^2(1-\nu^2)}{h^2}$$

则方程(15)、(18)和边界条件可简化为

$$\begin{aligned}L(\rho\varphi) &= s(\varphi - k\rho) - Q \\ L(\rho s) &= \varphi \left(k\rho - \frac{1}{2}\varphi \right) + \lambda\rho\end{aligned}\quad (20a, b)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时, } \gamma=0, \quad \varphi=0, \quad \rho \frac{ds}{d\rho} - \nu s = 0 \quad (21)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时, } \varphi=0, \quad s=0 \quad (22)$$

其中 L 是微分算子, λ 是无量纲化后的温度系数, 主要反应壳体中心温度和边缘温度的差异.

$$L(\dots) = \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\dots) \quad (23)$$

2 边值问题的求解

应用修正迭代法解此问题, 此时, 以扁球壳中心的无量纲内边缘挠度 Y_m 作为迭代参数, 即

$$Y_m = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{w}{h} \Big|_{\rho=0} = \int_0^1 \varphi d\rho \quad (24)$$

在第一次近似中, 略去方程(20a)中的非线性项, 便得到如下的线性边值问题

$$\begin{aligned}L(\rho\varphi_1) &= -Q \\ L(\rho s_1) &= \varphi_1 \left(k\rho - \frac{1}{2}\varphi_1 \right) + \lambda\rho\end{aligned}\quad (25a, b)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时, } \gamma_1=0, \varphi_1=0, \quad \rho \frac{ds_1}{d\rho} - \nu s_1 = 0 \quad (26a, b, c)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时, } \varphi_1=0, s_1=0 \quad (27a, b, c)$$

利用式(24), 问题(25) ~ (27)的解为

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -4(\rho \ln \rho) Y_m \\ s_1 &= \left(-\rho^3 \ln^2 \rho + \frac{3}{2} \rho^3 \ln \rho - \frac{7}{8} \rho^3 + a_1 \rho \right) Y_m^2 + \\ &\quad \left(\frac{3}{8} \rho^3 - \frac{1}{2} \rho^3 \ln \rho + a_2 \rho \right) k Y_m + \lambda \left(\frac{1}{3} \rho^2 + a_3 \rho \right)\end{aligned}\quad (28a, b)$$

其中

$$a_1 = \left(\frac{7}{8} \nu - \frac{9}{8} \right) / (\nu - 1),$$

$$a_2 = \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{8} \nu \right) / (\nu - 1),$$

$$a_3 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \nu \right) / (\nu - 1)$$

在第二次近似中, 可得关于 φ_2 的如下非线性边值问

题

$$L(\rho\varphi_2) = s_1(\varphi_1 - k\rho) - Q \quad (29)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时, } \gamma_1=0, \quad \varphi_2=0, \quad (30)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时, } \varphi_2=0, \quad (31)$$

应用解(28),解上述问题(29)~(31),得到解 φ_2 ,然后再应用式(24),便得到壳体的二次近似特征关系式

$$Q = \alpha_1 Y_m^3 + \alpha_2 k Y_m^2 + (\lambda \alpha_3 + k^2 \alpha_4 + 8) Y_m + \alpha_5 k \lambda \quad (32)$$

其中

$$\alpha_1 = 8 \left(\frac{119}{2592} - \frac{1}{8} a_1 - \frac{1}{2} a_4 \right),$$

$$\alpha_2 = -8 \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{32} a_1 + \frac{1}{8} a_2 + \frac{1}{2} a_5 \right),$$

$$\alpha_3 = -8 \left(\frac{44}{3375} + \frac{1}{8} a_3 + \frac{1}{2} a_6 \right),$$

$$\alpha_4 = 8 \left(\frac{1}{216} + \frac{1}{32} a_2 - \frac{1}{2} a_7 \right),$$

$$\alpha_5 = 8 \left(\frac{1}{225} + \frac{1}{32} a_3 - \frac{1}{2} a_8 \right),$$

其中

$$a_4 = \frac{71}{432} - \frac{3}{8} a_1, a_5 = \frac{1}{8} a_1 - \frac{3}{8} a_2 - \frac{35}{288},$$

$$a_6 = -\frac{3}{8} a_3 - \frac{32}{675}, a_7 = \frac{7}{288} + \frac{1}{8} a_2,$$

$$a_8 = \frac{1}{45} + \frac{1}{8} a_3,$$

对式(32)求极值

$$\frac{dQ}{dY_m} = 0 \quad (33)$$

使得壳体失稳时的无量纲中心挠度

$$Y_m^* = \frac{-k\alpha_2 \pm \sqrt{(\alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_4)k^2 - 3\alpha_1(\lambda\alpha_3 + 8)}}{3\alpha_1} \quad (34)$$

将式(34)代入式(32),使得壳体的临界荷载公式

$$Q^* = \alpha_1 Y_m^{*3} + k\alpha_2 Y_m^{*2} + (\lambda\alpha_3 + k^2\alpha_4 + 8) Y_m^* + \alpha_5 k \lambda \quad (35)$$

由(34)式的判别式为零,可得壳体的临界几何参数,可用来区别壳体是否能够失稳,其公式为:

$$k_0 = \sqrt{\frac{3\alpha_1(\lambda\alpha_3 + 8)}{\alpha_2^2 - 3\alpha_1\alpha_4}} \quad (36)$$

3 算例

以 $\nu=0.3$ 的金属壳为例,利用式(32)、(35)和

(36),可以得到以下曲线(见图5~图9)。

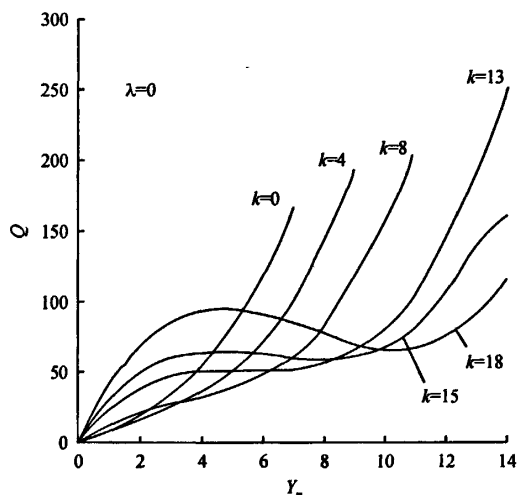


图5 各种 k 值下的荷载挠度曲线($\lambda=0$)

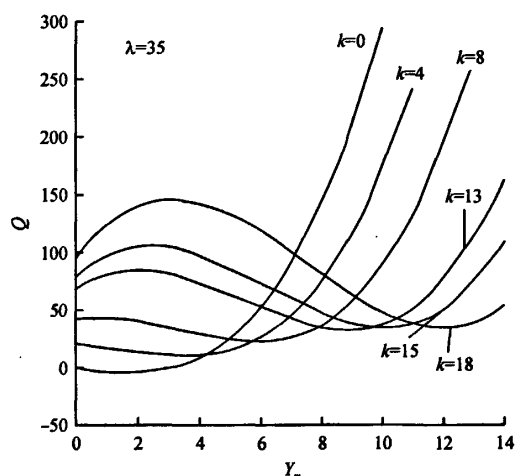


图6 各种 k 值下的荷载挠度曲线($\lambda=35$)

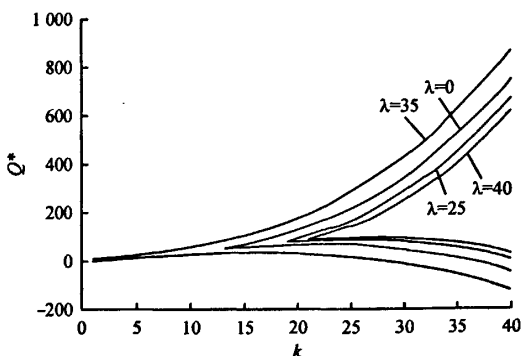
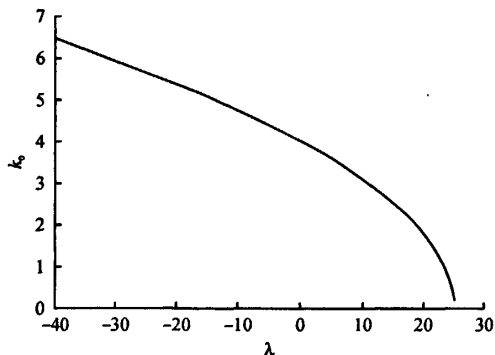
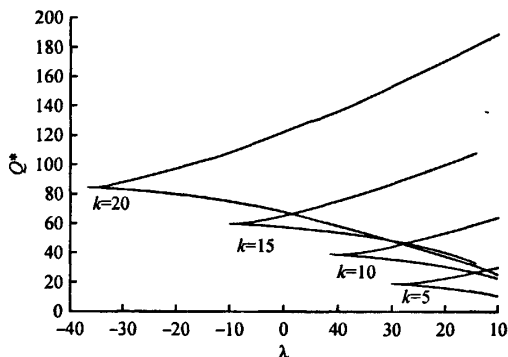


图7 各种 λ 值下的稳定曲线

图 8 临界几何参数 k_0 与 λ 的关系曲线图 9 临界载荷 Q^* 与 λ 的关系曲线

4 结论

由以上曲线,可以得到以下结论:

(1) 由图 5,图 6 可见,在不同的 λ (无量纲化的温度系数)值下,当几何参数 k 很小时, $Q \sim Y_m$ 曲线单调上升,壳体只弯曲而不屈曲,当几何参数 k 值较大时, $Q \sim Y_m$ 曲线出现了迴形线状态,这时壳体便发生了屈曲,当 $k = k_0$ 时,壳体处于屈曲与不屈曲的临界状态, $k = k_0$ 是壳体的临界屈曲点, k_0 是壳体的临界几何参数。

(2) 由图 7 可见,上临界荷载是几何参数 k 的

单调递增函数,随 k 的增大而增大,下临界荷载是几何参数 k 的单调递减函数,随 k 的增大而减小。

(3) 由图 8 可见,临界几何参数 k_0 随 λ 的增大而减小,即壳体中心温度与边缘温度的差值越大,临界几何参数越小。

(4) 由图 9 可见,上临界荷载是 λ 的单调递增函数,随 λ 的增大而增大,下临界荷载是 λ 的单调递减函数,随 λ 的增大而减小。即壳体中心温度与边缘温度的差值越大,上临界荷载越大,而下临界荷载越小。对于工程而言,往往取上临界荷载作为设计值,可见,增大壳体中心温度和边缘温度的差值,可以提高壳体的抗屈曲能力。

【参考文献】

- [1] 刘人怀,成振强. 集中载荷作用下开顶扁球壳的非线性稳定问题[J]. 应用数学和力学,1988,9(2):95-106.
- [2] 刘人怀,在边缘载荷作用下中心开孔圆底扁球壳的轴对称稳定性[J]. 力学学报,1977,(3):206-212.
- [3] 刘人怀,李 东. 均布载荷作用下开顶扁球壳的非线性稳定问题[J]. 应用数学和力学,1988,9(3):205-217.
- [4] LIU R H, WANG F. Nonlinear dynamic buckling of symmetrically laminated cylindrically orthotropic shallow spherical shells [J]. Archive of Applied Mechanics, 1998,68(6):375-384.
- [5] 王 璠,刘人怀. 复合材料层合开顶扁球壳的非线性动态屈曲[J]. 固体力学学报,2001,22(3):309-314.
- [6] 刘人怀,双层金属中心开孔扁球壳的非线性热稳定问题[J]. 中国科学技术大学学报,1981,11(1):84-99.
- [7] 罗祖道,袁德辉,刘汉东,等. 双层金属球面扁壳的热稳定问题[J]. 力学学报,1966,9(1):1-13.

[责任编辑:王景周]