

具有边界条件的双曲守恒律松弛逼近解的 L^1 收敛率

李晓萌¹, 崔慧萍², 刘红霞¹

(1. 暨南大学数学系, 广东 广州 510632; 2. 广东药学院基础学院数学教研室, 广东 广州 510006)

[摘 要] 讨论刚性松弛方程组初边值问题的松弛逼近解 L^1 -收敛到其平衡态解的收敛率. 在边界值为一个非超音速状态, 初始值在此非超音速状态的小扰动的条件下, 当平衡态解为具有有限条间断的分片光滑函数时, 使用匹配行波解的方法导出松弛方程组的初边值问题的松弛解 L^1 -收敛到其平衡态解的误差界为 $O(\varepsilon |\ln \varepsilon| + \varepsilon)$.

[关键词] 初边值问题; 守恒律; 松弛逼近解; 平衡态解; 收敛率

[中图分类号] O174.52 [文献标识码] A [文章编号] 1000-9965(2009)01-0061-07

L^1 -convergence rate of relaxation approximations to conservation laws with boundary

LI Xiao-meng¹, CUI Hui-ping², LIU Hong-xia¹

(1. Department of Mathematics, Jinan University, Guangzhou 510632, China;

2. Guangdong Pharmaceutical University; Guangzhou 510006, China)

[Abstract] L^1 -convergence rate of solutions to a stiff relaxation system with initial-boundary value condition to its equilibrium solutions is studied. Assume that the boundary data is a nontransonic state and initial data is a small perturbation, by using matching method and the traveling wave solutions, the error between the relaxation approximations and its equilibrium solution is estimated to be bounded by $O(\varepsilon |\ln \varepsilon| + \varepsilon)$ in L^1 -norm, if the equilibrium solutions are piecewise smooth with finitely many discontinuities for the initial-boundary value problem of the stiff relaxation system.

[Key words] initial-boundary value problem; conservation laws; relaxation approximations; equilibrium solution; convergence rate

考虑下列具有松弛源项的非线性双曲守恒律方程组的初边值问题

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \partial_x v_\varepsilon = 0, \\ \partial_t v_\varepsilon + \alpha \partial_x u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (f(u_\varepsilon) - v_\varepsilon), \end{cases} \quad x, t > 0, \quad (1)$$

$$u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x), v_\varepsilon(x, 0) = v_0(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

$$u_\varepsilon(0, t) = u_b(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为刚性松弛系数.

问题(1)的平衡解是下列守恒律的初边值问题

[收稿日期] 2008-06-27

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(10571075); 广东省自然科学基金资助项目(04010473)

[作者简介] 李晓萌(1983-), 女, 硕士研究生, 研究方向: 非线性偏微分方程及其应用

通讯作者: 刘红霞, 教授, 博士, 研究方向: 非线性偏微分方程及其应用

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & v = f(u), & x, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & v(x, 0) = v_0(x) \equiv f(u_0(x)), \\ & x > 0, \\ u(0, t) = u_b(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

的熵解 (u, v) .

松弛效应在许多物理现象中发生, 诸如热力学平衡的气体、色谱、河流问题、交通流问题等. 而松弛逼近模型的解与其平衡守恒律方程的熵解间的误差估计对守恒律数值方法的发展具有重要的意义. 我们来回顾一下相关的研究成果. Tveito-Winther^[1]对一些出现在色谱系中的松弛方程组建立了具有 $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ 的 L^1 -收敛率. Katsoulakis-Tzavaras^[2]推导出高维松弛逼近解与高维单个守恒律的有界 BV 熵解间的一个 L^1 -收敛率为 $O(\sqrt{\varepsilon})$. 对松弛方程组(1)的柯西问题, 当其具有严格凸的流函数的平衡方程(4), 的柯西问题的解在具有有限条间断的分片光滑函数类中时, Teng^[3]证明了松弛逼近解与其平衡方程的熵解间的 L^1 -收敛率为 $O(\varepsilon |\ln \varepsilon| + \varepsilon)$.

本文对松弛方程组的初边值问题在流函数 f 为严格凸且其平衡解为具有有限条间断的分片光滑函数的条件下, 使用匹配行波解方法^[4]对问题(1)~(3)建立松弛逼近解当刚性松弛系数 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时 L^1 收敛问题(4)的熵解的收敛率.

1 定义及基本引理

记 $(u, f(u))$ 是问题(4)的熵解, 满足文献[5]中关于熵解的定义, 则 u 满足边界熵条件^[5-6].

在给出本文的主要定理前, 先给出如下假设条件:

(I) $f \in C^2, f''(u) \geq \gamma > 0$.

(II) $u_0(x) (x > 0)$ 是一个有界且具有有限间断点 $\gamma_i (1 \leq i \leq n)$ 的分段光滑函数, $u_0(\gamma_i \pm 0), u_0(\gamma_i \pm 0)$ 存在, 且 $\|u_0\|_{L^1([0, \infty))} < \infty, a(u_0(x)) \geq 0$ 有有限个拐点.

(III) $u_b(t) \equiv u_-$, 其中 u_- 是满足 $a(u_-) > 0$ 的常数.

(IV) 存在与 ε 无关的正常数 δ 使得 $\|u_0(\cdot) - u_- \|_{BV} + \|v_0(\cdot) - f(u_-) \|_{BV} < \delta$.

(V) $\|v_0 - f(u_0)\|_{L^1([0, \infty))} = O(\varepsilon), \sqrt{\alpha} > \max\{1, \sup_{u_0(\infty) - M \leq u \leq u_0(\infty) + M} |a(u)|\},$

其中 $M = \|u_0(\cdot)\|_{BV} + \|v_0(\cdot)\|_{BV} + |u_-|,$
 $a(u) = f'(u), u_0(x) := \frac{du_0(x)}{dx}, u_b(x) := \frac{d^2 u_0(x)}{dx^2}.$

注 1.1 在条件(I) - (III)的假设下, 如果 $w = w(x, t)$ 是下列单个守恒律的柯西问题

$$\begin{cases} w_t + f(w)_x = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ w(x, 0) = \begin{cases} u_-, & x < 0 \\ u_0(x), & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

的熵解. 若令 $u = w(x, t) \big|_{(0, \infty) \times [0, \infty)}$, 则由文献[7-8]易知 $(u, f(u))$ 是初边值问题(4)的熵解. 另外, 根据文献[3], u 具有下列性质: (1) u 是有界且只有有限条间断的 C^2 分片光滑函数; (2) $u(0, t) \equiv u_- (t > 0)$; (3) u 中的激波间断速度非负, 且 u 若在原点处有初始激波发出, 则此激波速度符号为正.

贯穿全文, $\|\cdot\|$ 表示标准的 L^1 范数 $\|\cdot\|_{L^1([0, \infty))}, C$ 或 $C(t)$ 表示与 ε 及 x 无关的正常数, c 表示与 ε, x 及 t 无关的正常数, 但可能在不同的地方表示不同的值.

由于匹配行波解方法依赖于松弛方程组的行波解的性态和非齐次刚性松弛方程组的分片光滑解的 L^1 稳定性性质, 首先给出关于非齐次松弛方程组的 L^1 -稳定性引理.

引理 1.1 设 $(u^{(i)}(x, t), v^{(i)}(x, t)) (i = 1, 2)$ 是下列非齐次刚性松弛方程组

$$\begin{cases} \partial_t u^{(i)} + \partial_x v^{(i)} = k_i(x, t), \\ \partial_t v^{(i)} + \alpha \partial_x u^{(i)} = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \\ (v^{(i)} - f(u^{(i)})) + h_i(x, t), \end{cases} \quad x > 0, t > 0, \quad (1.1)$$

的分片光滑的弱解. 上述方程组除了在某些非特征间断曲线 $x = X_n(t) (1 \leq n \leq N)$, 即 $\dot{X}_n(t) \neq \pm \sqrt{\alpha}$ 外的所有 $(x, t) (x, t > 0)$ 的值均成立. 如果 $(u^{(1)}, v^{(1)})$ 连续且 $(u^{(1)} - u^{(2)}, v^{(1)} - v^{(2)}) \rightarrow (0, 0) (x \rightarrow +\infty)$, 则对 $\forall \tau \geq s \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \|u^{(1)}(\cdot, \tau) - u^{(2)}(\cdot, \tau)\| + \|v^{(1)}(\cdot, \tau) - v^{(2)}(\cdot, \tau)\| \leq \frac{(1 + \sqrt{\alpha})^2}{\sqrt{\alpha}} \left\{ \|u^{(1)}(\cdot, s) - u^{(2)}(\cdot, s)\| + \|v^{(1)}(\cdot, s) - v^{(2)}(\cdot, s)\| + \right. \\ & \sum_{n=1}^N \int_s^\tau (\sqrt{\alpha} + |\dot{X}_n(t)|) [|u^{(2)}(\xi, t)| + |v^{(2)}(\xi, t)|]_{\xi=X_n(t)} dt + \int_s^\tau \int_0^\infty |k_1(\xi, t) - \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & k_2(\xi, t) | + | h_1(\xi, t) - h_2(\xi, t) | d\xi dt \Big\} + \\ & \frac{1+\sqrt{2}}{2} \int_0^\tau (|v^{(1)} - v^{(2)} + \sqrt{\alpha}(u^{(1)} - u^{(2)})| - \\ & |-(v^{(1)} - v^{(2)}) + \sqrt{\alpha}(u^{(1)} - u^{(2)})|) \Big|_{x=0} dt, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

其中 $[\omega(\xi, t)]_{\xi=X_n} := \omega(X_n+0) - \omega(X_n-0)$.

证明 我们使用类似于文献[3]的技巧证明此引理. 设

$$\begin{cases} r_+^{(i)} = v^{(i)} - \sqrt{\alpha}u^{(i)} \\ r_-^{(i)} = -v^{(i)} - \sqrt{\alpha}u^{(i)} \end{cases}$$

为对应于松弛方程组(1.1)的光滑解 $(u^{(i)}, v^{(i)})$ ($i=1, 2$)的黎曼不变量, 满足下式

$$\begin{cases} \partial_t r_+^{(i)} - \sqrt{\alpha} \partial_x r_+^{(i)} = -\frac{1}{\varepsilon} G(r_+^{(i)}, r_-^{(i)}) + K^{(i)}(x, t), \\ \partial_t r_-^{(i)} + \sqrt{\alpha} \partial_x r_-^{(i)} = \frac{1}{\varepsilon} G(r_+^{(i)}, r_-^{(i)}) + H^{(i)}(x, t), \end{cases} \quad (1.3)$$

其中

$$\begin{cases} G(r_+^{(i)}, r_-^{(i)}) = \frac{r_+^{(i)} - r_-^{(i)}}{2} - f\left(-\frac{r_+^{(i)} + r_-^{(i)}}{2\sqrt{\alpha}}\right), \\ K^{(i)} = h_i - \sqrt{\alpha}k_i, \quad H^{(i)} = -h_i - \sqrt{\alpha}k_i. \end{cases} \quad (1.4)$$

利用式子 $\partial_t |w| = \text{sgn}(w) \partial_t w$ 及 $r_\pm^{(1)}, r_\pm^{(2)}$ 的定义得

$$\begin{aligned} \partial_t (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| + |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|) - \sqrt{\alpha} \partial_x (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| - |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|) \leq |K^{(1)} - K^{(2)}| + |H^{(1)} - H^{(2)}|. \end{aligned} \quad (1.5)$$

在得到上式时用到结论 $(\text{sgn}(r_+^{(1)} - r_+^{(2)}) - \text{sgn}(r_-^{(1)} - r_-^{(2)}))(G(r_+^{(1)}, r_-^{(1)}) - G(r_+^{(2)}, r_-^{(2)})) \geq 0$ (见文献[9]).

设 $\Omega_0 := \{(x, t) | 0 \leq x \leq X_1(t), s \leq t \leq \tau\}$,

$\Omega_n := \{(x, t) | X_n(t) \leq x \leq X_{n+1}(t), s \leq t \leq \tau\}$ ($1 \leq n \leq N-1$),

$\Omega_N := \{(x, t) | X_N(t) \leq x < \infty, s \leq t \leq \tau\}$,

$\Omega := \bigcup_{i=0}^N \Omega_i$.

在 Ω_0 上对(1.5)进行积分, 并使用Green公式得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_0} (\partial_t (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| + |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|) - \\ & \sqrt{\alpha} \partial_x (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| - |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|)) dx dt = \\ & \sqrt{\alpha} \int_s^\tau (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| - |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|) \Big|_{x=0} dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{X_1(\tau)} (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| + |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|) \Big|_{x=\tau} dx - \\ & \int_s^\tau ((|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| + |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|) \dot{X}_1(t) + \\ & \sqrt{\alpha} (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| - |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|)) dt - \\ & \int_0^{X_1(s)} (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| + |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|) \Big|_{x=s} dx \leq \\ & \iint_{\Omega_0} (|K^{(1)} - K^{(2)}| + |H^{(1)} - H^{(2)}|) dx dt. \end{aligned} \quad (1.6)$$

同样, 在 Ω_n ($1 \leq n \leq N$)上对式(1.5)积分并应用Green公式, 也有类似于(1.6)的式子成立. 于是根据二重积分对区域的有限可加性有

$$\begin{aligned} & \| (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| + |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|) (\cdot, \tau) \| \leq \\ & \| (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| + |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|) (\cdot, s) \| + \\ & \sum_{n=1}^N \int_s^\tau (\sqrt{\alpha} + \dot{X}_n(t)) \| (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| + \\ & |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|) \Big|_{x=X_n(t)} dt + \int_0^s (|K^{(1)} - \\ & K^{(2)}| + |H^{(1)} - H^{(2)}|) dx dt + \sqrt{\alpha} \int_s^\tau (|r_-^{(1)} - \\ & r_-^{(2)}| - |r_+^{(1)} - r_+^{(2)}|) \Big|_{x=0} dt. \end{aligned}$$

因 $\|u^{(1)}(\cdot, \tau) - u^{(2)}(\cdot, \tau)\| + \|v^{(1)}(\cdot, \tau) - v^{(2)}(\cdot, \tau)\| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{2}\right) \| (|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| + |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}|) (\cdot, \tau) \|$,

又 $|r_+^{(1)} - r_+^{(2)}| + |r_-^{(1)} - r_-^{(2)}| \leq (2 + 2\sqrt{\alpha}) \cdot (|u^{(1)} - u^{(2)}| + |v^{(1)} - v^{(2)}|)$,

$|K^{(1)} - K^{(2)}| + |H^{(1)} - H^{(2)}| \leq (2 + 2\sqrt{\alpha}) \cdot (|h_1 - h_2| + |k_1 - k_2|)$

再结合弱解 $(u^{(1)}, v^{(1)})$ 在非特征曲线 $|X_n(t)|_{n=1}^N$ 处的连续性即得式(1.2).

下面引进行波解的存在性引理.

引理1.2^[3] 设 $U_\pm(t)$ 是两个给定的函数, 且 $U_+(t) < U_-(t)$, $X(t)$ 由下式定义:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{f(U_+) - f(U_-)}{U_+ - U_-} := s(t),$$

其中 $|s(t)| < \sqrt{\alpha}$, 则松弛方程组(1)存在唯一的行波解

$$(U_s(x - X(t); U_-, U_+), V_s(x - X(t); U_-, U_+))$$

满足如下带边值条件的常微分方程组

$$\begin{cases} -sU'_s + V'_s = 0 \\ -sV'_s + \alpha U'_s = \frac{1}{\varepsilon}(f(U_s) - V_s) \\ (U_s, V_s)(\pm\infty; U_-, U_+) = (U_\pm, f(U_\pm)), \end{cases}$$

且 $U_s(\xi; U_+, U_-)$ 由下列方程

$$\xi = \varepsilon(\alpha - s^2) \int_{(f')^{-1}(s)}^{U_s} \frac{du}{f(u) - f(U_s) - s(u - U_s)} \quad (1.7)$$

确定,并具有如下性质:

$$(1) U_s(0; U_-, U_+) = (f')^{-1}(s);$$

$$(2) (U_s)_\xi(\xi; U_-, U_+) = \frac{1}{\varepsilon(\alpha - s^2)}(f(U_s) - f(U_+) - s(U_s - U_+)) < 0;$$

$$(3) |U_s(\xi; U_-, U_+) - H(\xi; U_-, U_+)| \leq \frac{\beta}{2\gamma}(U_- - U_+) \exp\left\{-\frac{\gamma(U_- - U_+)|\xi|}{2\varepsilon(\alpha - s^2)}\right\};$$

$$(4) \|U_s(\cdot; U_-, U_+) - H(\cdot; U_-, U_+)\|_{L(-\infty, +\infty)} \leq \frac{\beta}{2\gamma}(\alpha - s^2)\varepsilon;$$

$$(5) \|(U_s)_{U_-}(\cdot; U_-, U_+)U_- + (U_s)_{U_+}(\cdot; U_-, U_+)U_+ - H(\cdot; U_-, U_+)\|_{L(-\infty, +\infty)} \leq C(\gamma, \beta)(\alpha - s^2) \frac{|U_+| + |U_-|}{U_- - U_+} \varepsilon;$$

$$(6) \|(U_s)_{\xi U_s}(\cdot; U_-, U_+)\|_{L(-\infty, +\infty)} \leq \frac{C(\gamma, \beta)}{U_- - U_+},$$

其中 γ 由(I)所定义, $C(\gamma, \beta)$ 表示仅依赖于 γ, β 的

$$\text{常数, } \beta = \max_{u \in [U_+, U_-]} |f''(u)|, U_\pm = \frac{d(U_\pm)}{dt},$$

$$(U_s)_\xi = U'_s(\xi; U_-, U_+) = \partial_\xi U_s(\xi; U_-, U_+),$$

$$(U_s)_{U_\pm} = \partial_{U_\pm} U(\xi; U_-, U_+),$$

$$H(\xi; U_-, U_+) := \begin{cases} U_-, \xi < 0 \\ U_+, \xi > 0. \end{cases}$$

从现在开始, 令 $t_0 = 0, t_p (p = 1, 2, \dots, P) (t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p)$ 表示 u 中两个或多个激波相互作用的时刻, 或由 u 中的压缩波所产生的新激波的时刻. 对于任意固定时刻 $T < t_p$, 记 $t_{p+1} = T$. 下面我们对 u 的偏导数建立一些整体估计引理^[3], 它们对定理的证明是必需的.

引理 1.3 假设条件(I) - (III)成立, 设 $x = X(t)$ 为问题(4)的解 u 中满足 $\dot{X}(t) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$ (其中 $u^\pm := u(X(t) \pm 0, t)$) 的激波曲线. 若 $x = X(t)$ 在 $t = 0$ 时形成, 则

$$\int_0^{T_0} |u_x(X(t) \pm 0, t)| dt \leq C;$$

若 $x = X(t)$ 是在 $t = t_p > 0$ 时形成的新激波, 则

$$\int_{t_p+\delta}^{T_0} |u_x(X(t) \pm 0, t)| dt \leq C |\ln \delta| + C,$$

其中 δ 充分小, $T_0 > t_p$ 为任意一个固定时刻, C 是与 δ 无关的常数.

引理 1.4 假设条件(I) - (III)成立, 且问题(4)的解 u 中含有一个在 $x = z$ 处形成的中心稀疏波. 令 $x = X_L(t)$ 与 $x = X_R(t)$ 分别表示这个稀疏波的左右边界. 若 $d(u_0(z+0))$ 不是负的极小值, 则 $|u_x(X_R+0, t)| \leq C, |u_x(X_R-0, t)| \leq Ct^{-1}$. 以上结果在 $x = X_R(t)$ 与激波相互作用前成立. 对 $x = X_L(t)$ 也有类似结论成立.

若 $d(u_0(z+0))$ 是负的极小值, 且极小值点将导致在将来某一时刻产生一个新的激波, 则

$$\begin{aligned} |u_x(X_R+0, t)| &\leq C(t-t_p)^{-1}, \\ |u_x(X_R-0, t)| &\leq Ct^{-1} \quad (t < t_p), \end{aligned}$$

其中 $t_p = \frac{-1}{d(u_0(z+0))}$. 在 $t = t_p$ 时刻后, $x = X_R(t)$ 将成为一个新的激波.

若考虑 $d(u_0(z-0))$, 对 $x = X_L(t)$ 也有类似结论成立.

引理 1.5 在条件(I) - (III)的假设下, 问题(4)的熵解 u 满足如下的估计式:

$$\begin{aligned} \|u_x(\cdot, t)\| &\leq C(t \geq 0), \\ \int_{t_p+\delta}^{t_{p+1}-\delta} |u_x(\cdot, t)| dt &\leq C |\ln \delta| + C, \\ \int_{t_p+\delta}^{t_{p+1}-\delta} \|u_{xx}(\cdot, t)\| dt &\leq C |\ln \delta| + C, \\ \int_{t_p+\delta}^{t_{p+1}-\delta} \|u_x(\cdot, t)^2\| dt &\leq C |\ln \delta| + C, \end{aligned}$$

其中 $p = 0, 1, \dots, P, \delta > 0$ 充分小, C 是与 δ 无关的常数.

若 u 在 $t = 0$ 时刻无中心稀疏波产生, 且在 $t = t_p (0 \leq p \leq P)$ 时刻没有由压缩波而形成的新激波, 则上述的最后两个估计式可改进为

$$\begin{aligned} \int_{t_p+\delta}^{t_{p+1}-\delta} \|u_{xx}(\cdot, t)\| dt &\leq C, \\ \int_{t_p+\delta}^{t_{p+1}-\delta} \|u_x(\cdot, t)^2\| dt &\leq C. \end{aligned}$$

2 主要结论

定理 2.1 假设条件(I) - (V)成立, (u_s, v_s) 为初边值问题(1) - (3)的连续弱解, (u, v) (其中

$v=f(u)$) 为问题(4)的熵解, 则对 $\forall T \geq 0$, 下列误差估计式成立:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\|u_\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| + \|v_\varepsilon(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|) \leq C(T)(\varepsilon |\ln \varepsilon| + \varepsilon). \quad (2.1)$$

注 2.1 如果 u 中不含初始中心稀疏波, 或不含由于压缩波产生的新激波, 则误差界改进为:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\|u_\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| + \|v_\varepsilon(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|) \leq C(T)\varepsilon. \quad (2.2)$$

借助文献[3, 10]中的分析方法, 根据问题(4)的熵解的几何结构, 我们将利用 L^1 -稳定性引理 1.1 以及行波解引理 1.2, 将问题(1)~(3)的解 $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ 与问题(4)的熵解 (u, v) 之间的误差估计分两个部分来进行. 一部分是估计 (u, v) 与其辅助逼近函数对 $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon)$ 之间的 L^1 -误差界, 另一部分是估计 $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon)$ 与 $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ 之间的 L^1 -误差界. 如果问题(4)的熵解 u 在区域 $(0, +\infty) \times (\tau_1, \tau_2)$ 内 $(0 < \tau_1 < \tau_2 < T < \infty)$ 不包含激波间断, 则 u 在区域 $(0, +\infty) \times (\tau_1, \tau_2)$ 内的连续, 可令 $\hat{u}_\varepsilon = u, \hat{v}_\varepsilon = f(u) - \varepsilon(\alpha - a(u)^2)u_\varepsilon$, 我们能够直接使用引理 1.1. 否则, \hat{u}_ε 通过用问题(1)的行波解替代熵解 u 中相应的激波间断来构造, \hat{v}_ε 通过 \hat{u}_ε 来构造, 然后使用引理 1.2 得到 $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon)$ 与 (u, v) 的 L^1 -误差界, 至于 $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon)$ 与 $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ 之间的 L^1 -误差界, 则可使用引理 1.1 得到. 因而, 为证明定理 2.1 的结论, 只需证明对 $\forall t \in [t_p, t_{p+1}]$ 如下估计式成立:

$$\|u(\cdot, t) - \hat{u}_\varepsilon(\cdot, t)\| + \|v(\cdot, t) - \hat{v}_\varepsilon(\cdot, t)\| \leq C\varepsilon. \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \|u_\varepsilon(\cdot, t) - \hat{u}_\varepsilon(\cdot, t)\| + \|v_\varepsilon(\cdot, t) - \hat{v}_\varepsilon(\cdot, t)\| \leq C(\|u_\varepsilon(\cdot, t_p) - \hat{u}_\varepsilon(\cdot, t_p)\| + \|v_\varepsilon(\cdot, t_p) - \hat{v}_\varepsilon(\cdot, t_p)\|) + \\ & C(\varepsilon |\ln \varepsilon| + \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.4)$$

而由引理 1.1 有

$$\begin{aligned} & \|u_\varepsilon(\cdot, t) - \hat{u}_\varepsilon(\cdot, t)\| + \|v_\varepsilon(\cdot, t) - \hat{v}_\varepsilon(\cdot, t)\| \leq C(\|u_\varepsilon(\cdot, t_p) - \hat{u}_\varepsilon(\cdot, t_p)\| + \|v_\varepsilon(\cdot, t_p) - \hat{v}_\varepsilon(\cdot, t_p)\| + \\ & I_1 + I_2 + I_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } I_1 &:= \sum_{n=1}^N \int_{t_p}^t (\sqrt{\alpha} + |\dot{X}_n(\tau)|) | [|u^{(2)}(\xi, \tau)| + |v^{(2)}(\xi, \tau)|]_{\xi=X_n(\tau)} | d\tau, \\ I_2 &:= \int_{t_p}^t \int_0^\infty (|k_1(\xi, \tau) - k_2(\xi, \tau)| + |h_1(\xi, \end{aligned}$$

$$\tau) - h_2(\xi, \tau)|) d\xi d\tau,$$

$$I_0 := \int_{t_p}^t (|v^{(1)} - v^{(2)} + \sqrt{\alpha}(u^{(1)} - u^{(2)})| - |-(v^{(1)} - v^{(2)}) + \sqrt{\alpha}(u^{(1)} - u^{(2)})|) \Big|_{x=0} d\tau.$$

类似于文献[3], 并利用引理 1.3 - 1.5 可得 $|I_1|, |I_2| \leq O(\varepsilon |\ln \varepsilon| + \varepsilon)$, 因此为了得到式(2.4), 只需证明

$$|I_0| \leq C(\varepsilon |\ln \varepsilon| + \varepsilon) \quad (2.5)$$

下面根据 u 在 $(0, +\infty) \times (t_p, t_{p+1})$ 内的激波个数分 3 种典型情况来证明式(2.3) 及(2.5) 成立.

2.1 零个激波

此时在区域 $(0, +\infty) \times (t_p, t_{p+1})$ 内(4)的熵解 u 中不包含激波间断, 但可以有压缩波存在, 另外当 $p=0$ 时 u 也可能包含中心稀疏波. 因此 u 在 $(0, +\infty) \times (t_p, t_{p+1})$ 内为连续函数.

引进辅助函数

$$\hat{u}_\varepsilon := u, \quad \hat{v}_\varepsilon := f(u) - \varepsilon(\alpha - a(u)^2)u_\varepsilon,$$

则 \hat{u}_ε 在 $(0, +\infty) \times (t_p, t_{p+1})$ 内连续, \hat{v}_ε 在 u 的弱间断线 $x = X_n^{(p)}(t)$ ($n = 1, 2, \dots, N_p$) 上间断. 由 $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon)$ 的定义易见式(2.3) 成立.

现在估计 I_0 . 由 $u(0, t) = u_-, u_x(0, t) = 0, u_\varepsilon(0, t) = u_-$ 有

$$\begin{aligned} \hat{u}_\varepsilon(0, t) &= u_-, \hat{v}_\varepsilon(0, t) = f(u_-) - \varepsilon(\alpha - a(u_-)^2)u_\varepsilon(0, t) = f(u_-), \end{aligned}$$

$$\text{则 } I_0 = \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{2} \int_{t_p}^{t_{p+1}} (|\hat{v}_\varepsilon - v_\varepsilon| - |-(\hat{v}_\varepsilon - v_\varepsilon)|) \Big|_{x=0} d\tau = 0.$$

2.2 一个激波

此时在区域 $(0, +\infty) \times (t_p, t_{p+1})$ 上问题(4)的熵解 u 中仅含有一条激波间断曲线 $x = X(t)$, 且 $x = X(t)$ 是 C^2 光滑的. 由于 $u \notin C((0, +\infty) \times (t_p, t_{p+1}))$, 所以不能直接使用 L^1 -稳定性引理. 为了克服这个困难, 引入辅助函数 $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon)$ 如下

$$\begin{aligned} \hat{u}_\varepsilon &:= u - [H(x - X(t); u^-, u^+) - U_\varepsilon(x - X(t); u^-, u^+)], \\ \hat{v}_\varepsilon &:= f(\hat{u}_\varepsilon) - \varepsilon[(\alpha - a(\hat{u}_\varepsilon)a(u))u_\varepsilon + (\alpha - \dot{X}(t)^2)(U_\varepsilon)_x], \end{aligned}$$

其中 $u^*(t) := u(X(t) \pm 0, t)$.

由 \hat{u}_ε 的定义易知, 在 $(0, +\infty) \times (t_p, t_{p+1})$ 内 $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon)$ 为连续函数对, 根据行波解引理 1.2 容易验证式(2.3) 成立.

由三角不等式易得

$$|\hat{v}_s - v_s + \sqrt{\alpha}(\hat{u}_s - u_s)| - |-(\hat{v}_s - v_s) + \sqrt{\alpha}(\hat{u}_s - u_s)| \leq 2\sqrt{\alpha}|\hat{u}_s - u_s| = 2\sqrt{\alpha}|u + U_s(x - X(t); u^-, u^+) - H(x - X(t); u^-, u^+) - u_s|$$

从而

$$I_0 \leq C \int_{t_p+s}^{t_p+s} |U_s(-X(\tau); u^-, u^+) - H(-X(\tau); u^-, u^+)| d\tau \quad (2.6)$$

由行波解引理 1.2 知

$$0 < H(-X(\tau); u^-, u^+) - U_s(-X(\tau); u^-, u^+) \leq c(u^- - u^+) \exp \left\{ -\frac{\gamma(u^- - u^+)X(\tau)}{2\varepsilon(\alpha - s^2)} \right\}. \quad (2.7)$$

下面分别对 $p=0$ 和 $p>0$ 的情形来估计式 (2.6) 的右边.

2.2.1 $p=0$ 的情形

由条件(II)知 $\dot{X}(t) > 0$ ($t \in [t_0, t_1]$). 为了估计式 (2.6) 的右边, 只需找出 $x = X(t)$ 的正下界函数. 根据注 1.1 知 u 中的激波速度非负, 且 u 若在原点处有初始激波发出, 则此激波速度符号为正, 结合激波曲线 $x = X(t)$ 的位置及凹凸性, 分以下 4 种子情形来讨论.

(P1) $X_0(t_0) = 0, \dot{X}_0(t) > 0$ ($t \in [t_0, t_1]$);

(P2) $X_0(t_0) = 0, \dot{X}_0(t) < 0$ ($t \in [t_0, t_1]$);

(P3) $X_0(t_0) = 0$, 且曲线 $x = X(t)$ 在区域 $(0, +\infty) \times (0, t_1)$ 内存在拐点;

(P4) $X(t) > 0$ ($t \in [t_0, t_1]$).

在子情形(P1)下, 有 $X(t) \geq \dot{X}(0)t > 0$ ($t \in [0, t_1]$), 其中 $\dot{X}(0) = \frac{f(u_-) - f(u_0(0+))}{u_- - u_0(0+)}$. 从而对 $t \in [t_0, t_1]$, 由式 (2.7) 可得

$$I_0 \leq c(u_- - u^+) \int_s^t \exp \left\{ -\frac{\gamma(u_- - u^+) \dot{X}(0)t}{2\varepsilon(\alpha - s^2)} \right\} dt \leq cu_- \int_s^t \exp \left(-\frac{c_1 t}{2\varepsilon\alpha} \right) dt \leq C(t_1)\varepsilon. \quad (2.8)_1$$

在子情形(P2)下, $X(t) \geq \frac{X(t_1)t}{t_1}$ ($t \in [0, t_1]$), 于是当 $t \in [t_0, t_1]$, 由式 (2.7) 得

$$I_0 \leq c(u_- - u^+) \int_s^t \exp \left\{ -\frac{\gamma(u_- - u^+)X(t_1)t}{2\varepsilon(\alpha - s^2)t_1} \right\} dt \leq C(t_1)\varepsilon. \quad (2.8)_2$$

在子情形(P3)下, 曲线 $x = X(t)$ 在区域 $(0, +\infty) \times (0, t_1)$ 内存在拐点, 设拐点为 $(X(t_*), t_*)$, 于是当 $t \in [0, t_*]$ 时有 $\dot{X}_0(t) > 0$ 或 $\dot{X}_0(t) \leq 0$ 成立.

若 $\dot{X}(t) \leq 0$ ($t \in [0, t_*]$), 则 $X(t) \geq \frac{x_*}{t_1}t$, ($t \in [0, t_1]$), 其中 $x_* = \min_{t \in [t_*, t_1]} X(t) > 0$, 从而对 $t \in [t_0, t_1]$ 有

$$I_0 \leq c(u_- - u^+) \int_s^t \exp \left\{ -\frac{\gamma(u_- - u^+)x_*t}{2t_1\varepsilon(\alpha - s^2)} \right\} dt \leq C(t_1)\varepsilon.$$

若 $\dot{X}(t) > 0$ ($t \in [0, t_*]$), 则 $X(t) \geq \frac{x_{**}}{t_1}t$ ($t \in [0, t_1]$), 其中 $x_{**} = \min \left\{ x_*, \frac{\dot{X}(0)}{t_1} \right\} > 0$. 于是对 $t \in [t_0, t_1]$ 有

$$I_0 \leq c(u_- - u^+) \int_s^t \exp \left\{ -\frac{\gamma(u_- - u^+)x_{**}t}{2t_1\varepsilon(\alpha - s^2)} \right\} dt \leq C(t_1)\varepsilon. \quad (2.8)_3$$

在子情形(P4)下, 激波 $x = X(t)$ 是在 x 轴上离开原点的某点 $(x_1, 0)$ ($x_1 > 0$) 处产生的. 若 $a_0 =$

$\min_{t \in [0, t_1]} X(t) > 0$, 则 $X(t) \geq \frac{a_0}{t_1}t$ ($t \in [0, t_1]$), 故

$$I_0 \leq c(u^- - u^+) \int_s^t \exp \left\{ -\frac{\gamma(u^- - u^+)a_0t}{2t_1\varepsilon(\alpha - s^2)} \right\} dt \leq C(t_1)\varepsilon. \quad (2.8)_4$$

由式 (2.8)₁ ~ (2.8)₄ 得 $I_0 \leq C\varepsilon$. (2.9)

2.2.2 $P>0$ 的情形

当 $P>0$ 时, 由条件(II)知 $u(0+t) = u_-$ ($t \in (0, \infty)$) 且 $\dot{X}(t) > 0$ ($t \in [t_p, t_{p+1}]$), 于是 $X(t) > 0$, $x = X(t)$ ($t \in [t_p, t_{p+1}]$).

为了估计 I_0 , 像子节 2.2.1 那样, 我们只需找到 $x = X(t)$ 的一个正下界函数.

由于 $\dot{X}(t) > 0$ ($t \in [t_p, t_{p+1}]$), 故 $X(t) \geq \frac{X(t_p)}{t_{p+1}-t_p}(t-t_p)$ ($t \in [t_p, t_{p+1}]$), 又因为当 $t \in [t_p, t_{p+1}]$ 时, $u(0, t) = u_-$, 结合式 (2.6) 得

$$I_0 \leq c(u^- - u^+) \int_{t_p+s}^{t_{p+1}-s} \exp \left\{ -\frac{\gamma(u^- - u^+)X(t_p)}{(\alpha - s^2)(t_{p+1} - t_p)} \cdot \frac{t - t_p}{2\varepsilon} \right\} dt \leq C\varepsilon. \quad (2.10)$$

2.3 多个激波

假设在 $(0, +\infty) \times (t_p, t_{p+1})$ 内 u 含有多个激波间断曲线 $x = X_n(t)$ ($1 \leq n \leq N$). 不失一般性, 我们只讨论两个激波的情形. 设这两个激波曲线分别为 $x = X_1(t)$, $x = X_2(t)$, 且满足 $X_1(t) < X_2(t)$ ($t \in [t_p, t_{p+1}]$). 设

$$\begin{aligned}\hat{u}_\varepsilon &:= u - \sum_{i=1}^2 [H(x - X_i(t); u_-^{(i)}, u_+^{(i)}) - \\ &\quad U_\varepsilon(x - X_i(t); u_-^{(i)}, u_+^{(i)})], \\ \hat{v}_\varepsilon &:= f(\hat{u}_\varepsilon) - \varepsilon \left[(\alpha - a(\hat{u}_\varepsilon)a(u))u_x + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^2 (\alpha - \dot{X}_i(t)^2)(U_\varepsilon^{(i)})_x \right],\end{aligned}$$

由以上的构造知, \hat{u}_ε 是 $(0, +\infty) \times (t_p, t_{p+1})$ 上的连续函数, 利用引理 1.2 中性质(4), 引理 1.6 及 $(U_\varepsilon)_x < 0$ 可得

$$\begin{aligned}\|u(\cdot, t) - \hat{u}_\varepsilon(\cdot, t)\| + \|v(\cdot, t) - \hat{v}_\varepsilon(\cdot, t)\| &\leq \\ C \left(\sum_{i=1}^2 \|H(x - X_i(t); u_-^{(i)}, u_+^{(i)}) - U_\varepsilon(x - \right. \\ &\quad \left. X_i(t); u_-^{(i)}, u_+^{(i)})\| + \varepsilon \|(\alpha - a(\hat{u}_\varepsilon)a(u))u_x + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^2 (\alpha - \dot{X}_i(t)^2)(U_\varepsilon^{(i)})_x\| \right) \leq C\varepsilon,\end{aligned}$$

从而 $\hat{u}_\varepsilon - u$ 及 $\hat{v}_\varepsilon - v$ 满足式(2.3).

在对边界积分进行估计时, 可选取 $x = X_1(t)$ 的正下界函数同时作为 $x = X_1(t)$ 和 $x = X_2(t)$ 的正下界函数, 而 $x = X_1(t)$ 的正下界函数的选取同子节 2.2.1. 及子节 2.2.2.

注 2.2 若 u 中不含由于压缩波产生的新激波, 则式(2.4)可改进为

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon(\cdot, t) - \hat{u}_\varepsilon(\cdot, t)\| + \|v_\varepsilon(\cdot, t) - \hat{v}_\varepsilon(\cdot, t)\| &\leq C(\|u_\varepsilon(\cdot, t_p) - \hat{u}_\varepsilon(\cdot, t_p)\| + \\ &\quad \|v_\varepsilon(\cdot, t_p) - \hat{v}_\varepsilon(\cdot, t_p)\|) + C\varepsilon,\end{aligned}$$

结合式(2.3)可得定理 2.1 中的式(2.2).

[参考文献]

[1] TVEITO A, WINTHER R. On the rate of convergence to

equilibrium for a system of conservation laws with relaxation term[J]. SIAM J Math Anal, 1997, 28: 136 - 161.

[2] KATSOULAKIS M A, TZAVARAS A E. Contractive relaxation systems and scalar multidimensional conservation law[J]. Comm Part Diff Eqs, 1997, 22: 195 - 233.

[3] TENG Z H. First-order L-convergence for relaxation approximations to conservation laws[J]. Comm. Pure Appl Math, 1998, 11: 857 - 895.

[4] GOODMAN J, XIN Z P. Viscous limits for piecewise smooth solutions to systems of conservation laws[J]. Arch Rat Mech Anal, 1992, 121: 235 - 265.

[5] WANG W C, XIN Z P. Asymptotic limit of initial boundary value problems for conservation laws with relaxational extensions[J]. Comm Pure Appl Math, 1998, 11: 505 - 535.

[6] BARDOS C, LEROUS A Y, NEDELEC J C. First order quasilinear equations with boundary conditions[J]. Comm Part Diff Eqs, 1979, 4: 1017 - 1034.

[7] PAN T, LIN L W. The global solution of the scalar non-convex conservation law with boundary condition (I, II)[J]. Part Diff Eqs, 1995, 8: 371 - 383; 1998, 11: 1 - 8.

[8] HOPF E. On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order[J]. J Math, 1969, 19: 483 - 487.

[9] NATALINI R. Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws[J]. Comm Pure Appl Math, 1996, 49: 795 - 823.

[10] LIU H X, PAN T. L^1 -convergence rate of viscosity methods for scalar conservation laws with the interaction of elementary waves and boundary[J], Quart Appl Math, 2004, 62: 601 - 621.

[责任编辑:王景周]