

三阶代数微分方程的代数解

何忠伟¹, 高凌云²

(1. 江西蓝天学院公教部, 江西 南昌 330029; 2. 暨南大学数学系, 广东 广州 510632)

[摘 要] 利用代数体函数的值分布理论和方法, 研究了三阶代数微分方程的代数体函数解的存在性, 得到三阶代数微分方程只存在代数解的充分条件.

[关键词] 代数体函数; 代数解; 微分方程.

[中图分类号] O174.52 [文献标识码] A [文章编号] 1000-9965(2009)01-0068-03

Algebroid solutions of third-order algebraic differential equations

HE Zhong-wei¹, GAO Ling-yun²

(1. Jiangxi BlueSky University, Nanchang 330029, China;

2. Department of Mathematics, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

[Abstract] The existence of algebraic solution of third-order algebraic differential equation is discussed. Using the value distribution theory of algebroid function, A sufficient condition is given.

[Key words] algebroidal function; algebraic solution; differential equation.

本文采用代数体函数的值分布理论的通常记号, 参见文献[1].

关于复微分方程的代数体函数解的存在性问题, 许多学者做了讨论并得到了一些结果(见文献[2-6]). 一般研究 $(w^n)^* = P(z, w)/Q(z, w)$ 与 $(w^{(n)})^* = P(z, w)/Q(z, w)$, 在同一问题时, 比如 Malmquist 定理代数体函数解, 可大致平移相应的结果. 但对于代数解这一问题却不尽然. 本文在文献[2]的理论方法基础上, 采用了一些新的技巧, 讨论如下三阶微分方程的代数解的存在性.

$$(w'w''w''')^* = P(z, w)/Q(z, w) \quad (1)$$

其中 $P(z, w) = \sum_{i=0}^p a_i(z)w^i$, $Q(z, w) = \sum_{j=0}^q b_j(z)w^j$, $a_p \neq 0, b_q \neq 0$; $\{a_i(z)\}$ 和 $\{b_j(z)\}$ 为有有限多个极点的亚纯函数, 且它们无公共零点.

文献[2]研究了微分方程 $(w^n)^* = P(z, w)/Q(z, w)$ 的代数体解的存在性问题, 得到了以下结果:

定理 A^[2] 设 $w(z)$ 为微分方程 $(w^n)^* = P(z, w)/Q(z, w)$ 的 v 值代数体解, 且 $p < n + q$, 则

$$\min\{n, n + q - p\} \log^+ M(r, w) \leq K \left[\sum_{i=0}^p \log^+ M(r, a_i) + \sum_{j=0}^{q-1} \log^+ M(r, b_j) \right] + O(\log r) (r \notin E).$$

其中 K 为正常数, E 为线测度有穷的区间序列.

定理 B^[2] 设 $w(z)$ 为上述微分方程 v 值代数体解, 若 $p < n + q$, 则 $w(z)$ 为代数解.

我们的结果是:

定理 1 设 $w(z)$ 为微分方程(1)的 v 值代数体解, 若 $p \leq n + 1$, 则 $w(z)$ 为代数解.

1 几个引理

引理 1 设 $w(z)$ 为超越的代数体函数且仅有有限多个极点, 且 $w(z)$, $w'(z)$ 和 $w''(z)$ 在 $|Z| > r_0$ 全纯, 则存在常数 $C_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 当 $r \geq r_1 \geq$

r_0 时, 有 $M(r, w) \leq C_1 + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^3 M(r, w'')$.

证明 参照文献[1]中的引理 4.5 的证明, 有

$$M(r, w) \leq C_1' + C_2' r M(r, w'). \quad (2)$$

由引理 1 的条件, 知 $w''(z)$ 和 $w'''(z)$ 在 $|Z| > r_0$ 全纯以及式(2), 则有

$$M(r, w') \leq C_1'' + C_2'' r M(r, w'') \text{ 和 } M(r, w'') \leq C_1''' + C_2''' r M(r, w''') \quad (3)$$

由式(2)和式(3), 知

$$M(r, w) \leq C_1' + C_2' \left\{ C_1'' + C_2'' r \left(C_1''' + C_2''' r M(r, w''') \right) \right\}$$

因此, 当 $r \geq r_1 \geq r_0$ 时, 存在常数 $C_i > 0$, 使得 $M(r, w) \leq C_1' + C_2' r + C_3' r^2 + C_4' r^3 M(r, w''')$.

引理 2 设 $w(z)$ 为超越的代数体函数且仅有有限多个极点, 则对 $\alpha > 0$ 除去总长度为有穷的 r 区间序列, 有

$$M(r, w') \leq 2^{\frac{1}{\alpha}} [M(r, w)]^{\alpha+1};$$

$$M(r, w'') \leq 2^{1+\frac{1}{\alpha}} [M(r, w)]^{2\alpha+1};$$

$$M(r, w''') \leq 2^{(1+\frac{1}{\alpha})(\alpha+1)+\frac{1}{\alpha}}.$$

$$[M(r, w)]^{(2\alpha+1)+(\alpha+1)} (r \notin E).$$

证明 由文献[2]中, 知如下式子成立.

$$M(r, w'') \leq 2^{1+\frac{1}{\alpha}} [M(r, w)]^{2\alpha+1};$$

$$M(r, w') \leq 2^{\frac{1}{\alpha}} [M(r, w)]^{\alpha+1};$$

因此, 对 $\alpha > 0$ 除去总长度为有穷的 r 区间序列, 有

$$M(r, w''') \leq 2^{\frac{1}{\alpha}} [M(r, w'')]^{\alpha+1}$$

则

$$M(r, w''') \leq 2^{\frac{1}{\alpha}} \left\{ 2^{1+\frac{1}{\alpha}} [M(r, w)]^{2\alpha+1} \right\}^{\alpha+1} = 2^{(1+\frac{1}{\alpha})(\alpha+1)+\frac{1}{\alpha}} [M(r, w)]^{(2\alpha+1)(\alpha+1)}.$$

引理 3^[1] 设 $w(z)$ 为代数体函数, 若

$\lim_{r \rightarrow \infty} \{T(r, w)/\log r\} < \infty$. 则 $w(z)$ 为一代数函数.

2 定理 1 的证明

首先, 证我们来证明如下式成立,

$$(8n+q-p) \log^+ M(r, w) \leq K_{14} \sum_{i=0}^{q-1} \log^+ M(r, b_i) +$$

$$K_{15} \sum_{i=0}^p \log^+ M(r, a_i) + O(\log r) (r \notin E).$$

设 E 为线测度有穷的区间序列. 考虑微分方程 (1) 的右边式子, 可知 w 的极点由 $\{a_i(z)\}$ 的极点和 $\{b_j(z)\}$ 的零点以及极点所控制. 设 z_0 为 w 的 τ 重极点, 但不是 $\{a_i(z)\}$ 的极点和 $\{b_j(z)\}$ 零点以及极点. 设 $w(z) = (z - z_0)^{-\frac{\tau}{\lambda}} w_0(z)$ ($w_0(z_0) \neq 0, \infty$), 对 $w(z)$ 分别求一、二、三阶导, 得到

$$w'(z) = (z - z_0)^{-\frac{(\tau+3)}{\lambda}} w_1; \quad w''(z) = (z - z_0)^{-\frac{(\tau+2)}{\lambda}} w_2; \\ w'''(z) = (z - z_0)^{-\frac{(\tau+1)}{\lambda}} w_3 \quad (w_{i=1,2,3}(z_0) \neq 0, \infty).$$

重写式(1)的形式

$$\sum_{j=0}^q b_j(z) w^j (w' w'' w''')^n = \sum_{i=0}^p a_i(z) w^i. \quad (4)$$

从而, 由式(4)及 z_0 有可能是 w_1, w_2, w_3 的极点, 因此, $q\tau + n(3\tau + 6\lambda) \leq p\tau$, 又 $p \leq n + q$, 则 $2n\tau + 6n\lambda \leq 0$, 这不可能. 所以 w 的极点由 $\{a_i(z)\}$ 的极点和 $\{b_j(z)\}$ 的零点以及极点所控制.

$$\text{令 } S = \{z | b_j = 0\} \cup \{z | b_j = \infty\};$$

$$\text{令 } Q_1(z, w) = Q(z, w)/b_q,$$

将式(1)重新改写成

$$b_q^n |Q_1(z, w) w' w'' w'''|^n = p(z, w) Q(z, w)^{n-1}. \quad (5)$$

$$\text{令 } U(z) = \frac{w^{q+3}}{q+3} + \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{b_k}{b_q}\right) \frac{w^{k+1}}{k+1}.$$

$$V(z) = (q+2)(q+1)w^q(w')^3 + 3(q+2)w^{q+1}$$

$$w''w' + w^{q+2}w''' - w^q w'''' + \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{b_k}{b_q}\right)' \frac{w^{k+1}}{k+1} +$$

$$3 \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{b_k}{b_q}\right)'' w^k w' + 3k \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{b_k}{b_q}\right)' w^{k-1} (w')^2 +$$

$$3k \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{b_k}{b_q}\right)' w^k w'' + k(k-1) \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{b_k}{b_q}\right) w^{k-2}$$

$$(w')^3 + 3k \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{b_k}{b_q}\right) w^{k-1} w'' w'$$

则

$$U''' - V(z) = Q_1(z, w) w' w'' w''' / w' w'' \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)中, 得到

$$b_q^n |U''' - V(z)|^n = P(z, w) Q(z, w)^{n-1} / (w' w'')^n. \quad (7)$$

由 U''' 和 $V(z)$ 的构造形式, 知 $U''' - V(z)$ 的极点由 w 和 $\{b_j(z)\}$ 产生, 而 w 的极点由 $\{a_i(z)\}$ 的极点和 $\{b_j(z)\}$ 的零点以及极点产生.

设 z_0 为 w 的 τ 重极点, 但不是 $\{a_i(z)\}$ 的极点和 $\{b_j(z)\}$ 零点以及极点. 由式(7), 知 $nq\tau + n(3\tau + 6\lambda) \leq p\tau + (n-1)q\tau$, 而 $p \leq n + q$, 故 $2n\tau + 6n\lambda \leq 0$, 这不可能. 所以 $U''' - V(z)$ 的极点均包含在 S 中. $U(z)$ 和 U''' 的极点数为有限, 故依引理 1, 有

$$M(r, U) \leq C_1 + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^3 M(r, U'''). \quad (8)$$

令 z_r 满足 $M(r, U''') = |U'''(z_r)|$, $|z_r| = r$, $\deg_{z_r}^{b_q}(z)$. 则有

$$|U'''(z, w(z)) - V(z, w(z))| \leq |U'''(z_r) - V(z_r)|^n \leq M(r, P(z, w) Q(z, w)^{n-1} / b_q^n (w' w'')^n). \quad (9)$$

而

$$M\left(\frac{P(z,w)Q(z,w)^{n-1}}{b_q^n(w'w'')^n}\right) \leq \frac{K_1}{r^{nd}} \frac{M(r,w)^{p+q(n-1)}}{M(r,w')^n M(r,w'')^n} \left\{ \sum_{i=0}^p M(r,a_i) \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=0}^q M(r,b_j) \right\}^{n-1} \quad (10)$$

由引理1和引理2(取 $\alpha=1$),知

$$M(r,w') \leq 2[M(r,w)]^2; M(r,w'') \leq 4[M(r,w)]^3; M(r,w''') \leq 32[M(r,w)]^6 \quad (11)$$

由 V 的构造及引理2,知

$$\begin{aligned} M(r,V) &\leq k_2 M(r,w)^{q+6} K_3 M(r,w)^{q+4} K_4 M(r,w)^{q+8} + \\ &\frac{K_5}{r_d} \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} M(r,b_j) \right\}^6 M(r,w)^q + \\ &\frac{K_6}{r_d} \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} M(r,b_j) \right\}^3 M(r,m)^{q+1} + \frac{K_7}{r_d} \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} M(r, \right. \\ &\left. b_j) \right\}^2 M(r,w)^{q+2} + \frac{K_8}{r_d} \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} M(r,b_j) \right\}^2 M(r,m)^{q+2} + \\ &\frac{K_9}{r_d} \sum_{j=0}^{q-1} M(r,b_j) M(r,w)^{q+3} + \frac{K_{10}}{r_d} \sum_{j=0}^{q-1} M(r,b_j) \cdot \\ &M(r,w)^{q+3} \leq \frac{K_{11}}{r_d} \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} M(r,b_j) \right\}^6 M(r,w)^{q+3} \end{aligned} \quad (12)$$

又由 U 的构造,知

$$M(r,U) \geq \frac{M(r,w)^{q+3}}{q+3} - \frac{K'_{11}}{r_d} M(r,w)^q \left\{ \sum_{j=0}^q M(r,b_j) \right\}. \quad (13)$$

由式(8)、式(12)和式(13),得到

$$\begin{aligned} M(r,u''') - M(r,V) &\geq \frac{1}{C_4 r^3} \left(\frac{M(r,w)^{q+3}}{q+3} - \right. \\ &\left. \frac{K'_{11}}{r_d} M(r,w)^q \sum_{j=0}^q M(r,b_j) - C_1 - C_2 r - C_3 r^2 \right) - \\ &\frac{K_{11}}{r_d} \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} M(r,b_j) \right\}^6 M(r,w)^{q+3}. \end{aligned} \quad (14)$$

由式(9)、式(10)和式(14),得到

$$\begin{aligned} M(r,w)^{\frac{8n-p+q}{n}} &\leq \frac{K_{12}}{r_d} \left\{ \sum_{j=0}^q M(r,b_j) \right\}^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \sum_{i=0}^p M(r, \right. \\ &\left. a_i) \right\}^{\frac{1}{n}} + \frac{K_{13}}{r_d} \left\{ \sum_{j=0}^q M(r,b_j) \right\} + \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} M(r, \right. \\ &\left. b_j) \right\}^2 + \left\{ \sum_{j=0}^{q-1} M(r,b_j) \right\}^6 \}. \end{aligned}$$

上式两边取 \log^+ ,得到

$$(8n+q-p)\log^+ M(r,w) \leq K_{14} \sum_{j=0}^{q-1} \log^+ M(r,a_i) + O(\log r) \quad (15)$$

其次,估计 $N(r,w)$,分两种情况讨论.

设 z_0 为 w 的 τ 重极点,为 $b_q(z)$ 的 t 重零点和某个 $a_i(z)$ 的 s 重极点.

(I)当 $b_q w^q (w'w''w''')^n$ 的极点的重数不等于式(4)的左边各项的重数,则有

$$q\tau + n(3\tau + 6\lambda) - t\lambda \leq p\tau + \sum_{i=0}^p s(a_i, \infty).$$

所以, $\tau \leq \left\{ (t-6n)\lambda + \sum_{i=0}^p s(a_i, \infty) \right\} / \{q+3n-p\}$.

(II)当 $b_q w^q (w'w''w''')^n$ 的极点的重数等于式(4)的左边某一项 $b_k w^k (w'w''w''')^n$ 的重数,则有

$$q\tau + n(3\tau + 6\lambda) + t\lambda \leq k\tau + n(3\tau + 6\lambda).$$

所以, $(q-k)\tau + t\lambda \leq 0$.这是不可能的.

综上,即可证得

$$N(r,w) \leq K_{16} [N(r,b_q) + N(r,1/b_q)] + K_{17} \sum_{i=0}^p N(r,a_i). \quad (16)$$

由式(15)和式(16),有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{T(r,w)/\log r\} < \infty.$$

从而有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{T(r,w)/\log r\} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \{T(r,w)/\log r\} < \infty.$$

则由引理3,知 $w(z)$ 为一代数函数,从而知 $w(z)$ 为式(1)的代数解.

3 例子

下面例子表明定理中的条件是精确的.

微分方程

$$(w'w''w''')^2 = \left(\frac{3-w^4}{4w^4}\right)^2 \left(\frac{1-w^4}{4w^2}\right)^2 \left(\frac{1+w^4}{4w^3}\right)^2$$

有超越代数体解 $w = \sqrt{\sin z}$,可知, $p=24 > n+q=20$.

[参考文献]

- [1] 何育赞,萧修治.代数体函数与常微分方程[M].北京:科学出版社,1988.
- [2] 高凌云.二阶代数微分方程的代数解[J].数学研究与评论,2005,25(2):358-362.
- [3] 高凌云.复代数微分方程的代数体允许解的一些结果[J].系统科学与数学,2001,21(2):213-222.
- [4] GAO Ling-yun. On algebroid solutions of generalized complex differential equations[J]. Chinese Quarterly J of Math,2001,16(1):20-25.
- [5] 萧修治,何育赞.代数微分方程的 Malmquist 定理[J].科学通报,1982,10:583-586.
- [6] 陈特为.具有代数体函数解的一类复常微分方程[J].数学季刊,1991,6(4):45-51.

[责任编辑:王景周]