

## 拟2-赋范空间凸性

黎永锦<sup>1</sup>, 华柳斌<sup>2</sup>

(1. 中山大学数学系, 广东广州510275; 2. 广州松田职业学院, 广东广州511370)

[摘要] 引入拟2-赋范空间的 $p$ -凸性, 研究拟2-赋范空间严格凸性的一些性质, 得到了拟2-赋范空间的严格 $p$ -凸性的 $p$ -端点刻画.

[关键词] 拟2-赋范空间;  $p$ -凸性;  $p$ -端点

[中图分类号] O177.2 [文献标识码] A [文章编号] 1000-9965(2009)03-0247-03

### The convexity of quasi 2-normed spaces

LI Yong-jin<sup>1</sup>, HUA Liu-bin<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou, 510275, China;

2. Guangzhou Sontan Polytechnic College, Guangzhou 511370, China)

[Abstract] The  $p$ -convexity in quasi 2-normed spaces was discussed and a characterization of strict  $p$ -convexity by  $p$ -extreme point was obtained.

[Key words] quasi 2-normed spaces;  $p$ -convexity;  $p$ -extreme point

Banach 空间单位球的凸性研究是从 Clarkson J<sup>[1]</sup>在 1936 年引入了一致凸 Banach 空间的概念开始的, 他开创了从 Banach 空间单位球的几何结构研究 Banach 空间性质的方法. 人们发现许多古典分析的定理只能在一致凸 Banach 空间中成立, 凸性还具有非常鲜明的几何直观意义, 凸性在最佳逼近及不动点理论中有着广泛的应用, 因此, Banach 空间的凸性得到了广泛地研究. 经过几十年的发展, 凸性理论已经发展成为 Banach 空间理论的重要内容之一<sup>[2]</sup>. Ghler S<sup>[3]</sup>在 1965 年引入并研究了 2-赋范空间. Diminnie C R 等<sup>[4]</sup>引进了 2-赋范空间的严格凸性, 并得到了一些很好的结果. 在本文中, 将讨论拟 2-赋范空间的严格凸性等有关性质.

定义 1 设  $X$  是一个实线性空间,  $C \geq 1$ , 如果定义了一个函数  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ , 且满足:

- (1)  $\|x\| \geq 0$  并且等号成立当且仅当  $x=0$ ;
- (2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  对所有的  $\lambda$  成立;
- (3)  $\|x+y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ ,

这里  $C \geq 1$  不依赖于  $x, y$ .

则称  $\|\cdot\|$  为  $X$  的一个拟范数. 如果  $X$  在  $\|\cdot\|$  下是完备的, 那么称  $X$  是拟 Banach 空间.

如将上面的(3)改为

$$(3') \|x+y\|^q \leq \|x\|^q + \|y\|^q,$$

则称  $\|\cdot\|$  为  $q$ -范数,  $(X, \|\cdot\|)$  称为  $q$ -赋范空间.

Aoki T<sup>[5]</sup>和 Rolewicz S<sup>[6]</sup>证明了下面定理.

定理 1 (Aoki-Rolewicz 定理) 若  $X$  是一个拟赋

[收稿日期] 2008-12-10

[基金项目] 国家自然科学基金项目(10871213)

[作者简介] 黎永锦(1963-), 男, 副教授, 博士; 研究方向: 泛函分析, E-mail: stalyj@mail.sysu.edu.cn

通讯作者: 华柳斌, 女, E-mail: hualiubin@163.com

范空间,则存在  $0 < p \leq 1$  和等价拟范数  $\|\cdot\|$ ,使得

$$\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p.$$

下面先引入拟2-赋范空间的定义.

**定义2** 设  $X$  是一个实线性空间,  $\dim X \geq 2$ ,  $C \geq 1$ , 如果定义了一个函数  $\|\cdot, \cdot\|: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ , 且满足:

(1)  $\|x, y\| \geq 0$  并且等号成立当且仅当  $x, y$  线性相关;

$$(2) \|x, y\| = \|y, x\|;$$

$$(3) \|\lambda x, y\| = |\lambda| \|x, y\| \text{ 对所有的 } \lambda \text{ 成立};$$

$$(4) \|x+y, z\| \leq C(\|x, z\| + \|y, z\|).$$

则称  $\|\cdot, \cdot\|$  为  $X$  的一个拟2-范数.

我们先定义拟2-赋范空间的  $p$ -凸性.

**定义3** 设  $X$  是拟2-赋范空间, 若  $0 < p < 1$ , 对任意  $x, y, z \notin \text{span}\{x, y\}$ , 有

$$\|x+y, z\|^p \leq \|x, z\|^p + \|y, z\|^p,$$

则称  $X$  是  $p$ -凸的.

下面再引入拟2-赋范空间的严格  $p$ -凸性.

**定义4** 设  $X$  是  $p$ -凸的拟2-赋范空间, 若  $0 < p < 1$ , 对任意  $x \neq 0, y \neq 0, z \notin \text{span}\{x, y\}$ , 有

$$\|x+y, z\|^p < \|x, z\|^p + \|y, z\|^p,$$

则称  $X$  是严格  $p$ -凸的.

**命题1** 设  $X$  是拟2-赋范空间,  $0 < p < 1$ , 若  $X$  是严格  $p$ -凸的, 则对任意  $\|x, z\| = 1$ , 和  $\|y, z\| = 1$ , 有

$$\left\| \frac{x+y}{2^{1/p}}, z \right\| < 1.$$

**证明** 由  $X$  是严格  $p$ -凸的可知, 对任意  $x \neq 0, y \neq 0, z \notin \text{span}\{x, y\}$ , 有

$$\|x+y, z\|^p < \|x, z\|^p + \|y, z\|^p,$$

故对任意  $\|x, z\| = 1$  和  $\|y, z\| = 1$ , 有

$$\|x+y, z\|^p < 1 + 1 = 2.$$

因此,  $\left\| \frac{x+y}{2^{1/p}}, z \right\| < 1$ .

**命题2** 设  $X$  是拟2-赋范空间,  $0 < p < 1$ , 若  $X$  是严格  $p$ -凸的, 则对任意  $0 < q < p$ ,  $X$  是严格  $q$ -凸的.

**证明** 容易证明, 对于任意的  $0 < p < 1, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , 有

$$\|\alpha + \beta\|^p < \|\alpha\|^p + \|\beta\|^p,$$

并且  $\|\alpha + \beta\|^p = \|\alpha\|^p + \|\beta\|^p$  成立当且仅当  $\alpha\beta = 0$ .

由于

$$\|x+y, z\|^p \leq \|x, z\|^p + \|y, z\|^p,$$

因此, 对任意  $0 < q < p$ , 有

$$\|x+y, z\|^q = (\|x+y, z\|^p)^{q/p} \leq$$

$$(\|x, z\|^p + \|y, z\|^p)^{q/p},$$

由  $0 < q/p < 1$  可知

$$(\|x, z\|^p + \|y, z\|^p)^{q/p} \leq$$

$$(\|x, z\|^p)^{q/p} + (\|y, z\|^p)^{q/p},$$

因而

$$\|x+y, z\|^q \leq \|x, z\|^q + \|y, z\|^q.$$

所以命题成立.

Banach 空间闭单位球的端点在研究 Banach 空间的凸性中起着非常重要的作用, 在这里我们将它推广为  $p$ -端点.

**定义4** 设  $X$  是拟2-赋范空间, 若  $0 < p < 1$ , 对任意  $x, y \in X, z \notin \text{span}\{x, y\}$ , 当  $\|x, z\| = 1$ , 和  $\|y, z\| = 1$ , 并且  $a = \alpha x + \beta y (\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha^p + \beta^p = 1)$  时, 有  $\alpha\beta = 0$ , 则称  $a$  是  $z$ -闭单位球  $B_z = \{x \in X \mid \|x, z\| = 1\}$  的  $p$ -端点.

下面定理给出了拟2-赋范空间  $X$  严格  $p$ -凸的端点刻画.

**定理2** 若  $0 < p < 1$ , 则  $p$ -凸拟2-赋范空间  $X$  是严格  $p$ -凸的, 当且仅当, 对任意  $z \neq 0$ , 满足  $\|a, z\| = 1$  的  $a$  都是  $z$ -闭单位球  $B_z$  的  $p$ -端点.

**证明** 若拟2-赋范空间  $X$  是严格  $p$ -凸的,  $z \neq 0$ , 满足  $\|a, z\| = 1, \|x, z\| = 1, \|y, z\| = 1$ , 且  $a = \alpha x + \beta y (\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha^p + \beta^p = 1)$  时, 有  $\alpha\beta = 0$ . 若  $\alpha\beta \neq 0$ , 则

$$\|a, z\|^p = \|\alpha x + \beta y, z\|^p < \|\alpha x, z\|^p + \|\beta y, z\|^p = \alpha^p \|x, z\|^p + \beta^p \|y, z\|^p = 1.$$

但这与  $\|a, z\| = 1$  矛盾, 因此  $a$  是  $z$ -闭单位球  $B_z$  的端点.

反过来, 假设对任意  $z \neq 0$ , 满足  $\|a, z\| = 1$  的  $a$  都是  $z$ -闭单位球  $B_z$  的端点, 但拟2-赋范空间  $X$  不是严格  $p$ -凸的, 则

存在  $x \neq 0, y \neq 0, z \notin \text{span}\{x, y\}$ , 使得

$$\|x+y, z\|^p = \|x, z\|^p + \|y, z\|^p.$$

不妨设  $\|x, z\| = 1, \|y, z\| = \varepsilon$ , 则

$$\alpha = \|x+y, z\| = (1 + \varepsilon^p)^{1/p}, \text{ 且}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^p = 1,$$

我们还有

$$\frac{x+y}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}x + \frac{\varepsilon}{\alpha}\frac{y}{\varepsilon}$$

$\|x, z\| = 1, \|\frac{y}{\varepsilon}, z\| = 1, \|\frac{x+y}{\alpha}, z\| = 1$ , 因此  $\frac{x+y}{\alpha}$  不是  $z$ -闭单位球  $B_z$  的端点, 矛盾, 所以定理得证.

#### [参考文献]

- [1] CLARKSON J A. Uniformly convex spaces[J]. Trans Amer Math Soc, 1936, (40): 396-414.
- [2] GODEFROY G. Renormings of Banach spaces. Handbook of the geometry of Banach spaces[M]. Amsterdam: North-Holland, 2001: 781-835.
- [3] GAHLER S. Linear 2-normierte Räume[J]. Math Nachr, 1965, 28: 1-43.
- [4] DIMINNIE C, GAHLER S, WHITE A. Strictly convex linear 2-normed spaces[J]. Math Nachr, 1974, 59: 319

-324.

- [5] AOKI T. Locally bounded linear topological spaces[J]. Proc Imp Acad Tokyo, 1942, 18: 588-594.
- [6] ROLEWICZ S. On a certain class of linear metric spaces[J]. Bull Acad Polon Sci, 1957, (5): 471-473.
- [7] LIN C S. On strictly convex and strictly 2-convex 2-normed spaces II[J]. J Math Math Sci, 1992, 15(3): 417-423.
- [8] ALBIAC F, LERANZO C. Some remarks on the geometry of quasi-Banach spaces[J]. Publ Math Debrecen, 2002, (61): 403-417.
- [9] DIESTEL J. Geometry of Banach spaces—selected topics[M]. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975: 485.

[责任编辑:王景周]

(上接第246页)

- [3] 石钟慈. 关于能量正交板元的形函数空间[J]. 中国科技大学学报, 1990, 20: 128-131.
- [4] SHI Z C, ZHANG F. Construction and analysis of a new energy-orthogonal unconventional plate element[J]. Journal of Computational Mathematics, 1990, 8(1): 75-91.
- [5] 陈绍春. 双参数能量正交板元[J]. 郑州大学学报, 1989, (2): 18-22.
- [6] 刘鸣放, 张建国. 十二参数能量正交三角形板元[J]. 暨南大学学报: 自然科学版, 2008, 29(3): 239-242.
- [7] SHI Z C. On the accuracy of the quasi-conforming and

generalized conforming finite elements[J]. Chinese Ann math Ser B, 1990, (11): 148-155.

- [8] SHI Z C, CHEN S C, HUANG H C. Plate elements with high accuracy[C]//LI T T, Colle Paperson Geom Anal Math Phys(纪念谷超豪教授70寿辰文集), World Scientific, Singapore, 1997: 155-164.
- [9] CIARLET P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. Amsterdam: North-Holland, 1978.
- [10] 陈绍春, 石钟慈. 构造单元刚度矩阵的双参数法[J]. 计算数学, 1991, (3): 286-296.

[责任编辑:王景周]