

## 波纹膜片非线性力学进展

袁 鸿

(暨南大学重大工程灾害与控制教育部重点实验室,应用力学研究所,广东 广州 510632)

[摘 要] 介绍了波纹膜片的研究进展,重点综述了波纹膜片非线性弯曲、振动和稳定性研究方法与方法比较.最后提出了波纹膜片非线性力学研究中值得关注的几个重点研究方向.

[关键词] 波纹壳; 膜片; 弯曲; 振动; 稳定

[中图分类号] 0343.5 [文献标识码] A [文章编号] 1000-9965(2009)05-0459-06

### Advances in nonlinear mechanics of corrugated diaphragm

YUAN Hong

(MOE Key Lab of Disaster Forecast and Control in Engineering, Institute of Applied Mechanics,  
Jinan University, Guangzhou 510632, China)

[Abstract] Advances on study of corrugated diaphragm are introduced. Research method and the comparison of the method of the nonlinear bending, vibration and stability of corrugated diaphragm are especially summarized. Finally, several important future research directions on the nonlinear mechanics of corrugated diaphragm are pointed out.

[Key words] corrugated shells; diaphragm; bending; vibration; stability

波纹膜片属于波纹壳体,由于其具有灵敏度高、线性度好等优点,在传感器中占有重要地位.传感器把各种非电量(物理量、化学量和状态变量等)转换为便于传输、处理、存储和控制的有用信号(一般为电量),在传感器将非电量转换成电量的过程中,对某些非电量如力、力矩、压力和扭矩等,不能一次就完成电量的转换,通常需要首先通过弹性敏感元件,将它们转换成应力、应变或位移等这些容易转换成电量的另一种非电量,然后再通过传感元件(应变片等),将其转换成电量.波纹膜片是广泛使用的一种弹性敏感元件,它既用于测量高于大气压的压力计中,也用于测量低于大气压的真空中.

### 1 波纹膜片的构造

波纹膜片表面的波纹是多种多样的,到底选用哪一种,这与具体情况下所必须得到的特征(力与挠度之间的关系)的形式有关,最常见的几种波纹形状如图1.

由于波纹膜片参数很多,又相互制约,所以使得它的设计很复杂,波纹膜片的参数主要指两方面,一是膜片参数,二是型面参数.膜片参数主要有膜片材料,膜片厚度和膜片工作直径等.型面参数是指与膜片波纹形状有关的参数,主要有波纹深度、波纹形状、边缘波纹、型面锥度、波纹倾角、波距等等.波纹

[收稿日期] 2008-09-30

[基金项目] 广东省科技计划项目(2005B32801002);暨南大学广东省高校《工程结构故障诊断》科研型重点实验室建设资金资助

[作者简介] 袁 鸿(1963-),男,教授,博士后,博士生导师;研究方向:弹性元件,板壳非线性力学,复合材料断裂力学,结构检测加固.  
E-mail: tyuanhong@jnu.edu.cn

膜片型面简图如图2所示.对于膜片中心挠度,我们以数学形式表达如下:

$$W=f(P,E,\nu,h,\alpha,H,\theta,L,R_0,\cdots)$$

式中:

$P$ ——工作压力

$E$ ——材料的弹性模量

$\nu$ ——泊松系数

$h$ ——膜片厚度

$a$ ——膜片工作半径

$H$ ——波纹深度

$\alpha$ ——型面锥度

$\theta$ ——波纹倾角

$L$ ——波距

$R_0$ ——边缘波纹

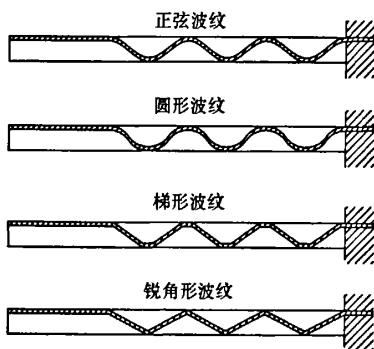


图1 最常见的波纹形状

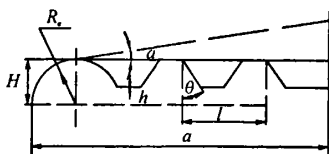
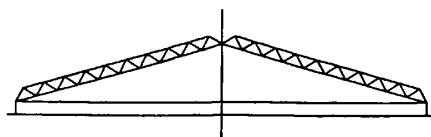


图2 波纹膜片型面简图

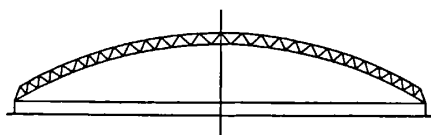
有时,为了调节膜片的特性,将膜片的型面做成一定的锥度(或者球面度),如图3所示.例如,在设计高度表的真空膜盒时,经常利用型面锥度来提高在真空中膜盒的灵敏度.

## 2 研究现状

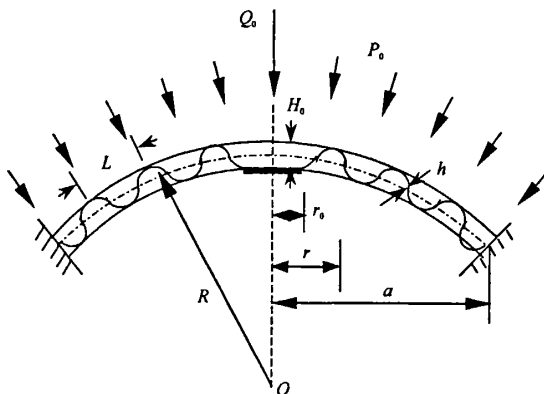
波纹膜片以其独特的优点在各种技术领域里广泛使用,尤其是作为低压敏感元件被广泛应用于精密仪器仪表和传感器中,自从 Hersey<sup>[1]</sup> 和 Griffith<sup>[2]</sup> 各自展开了对波纹圆板的实验和理论研究以来,世界各国的科学家在这方面做了大量的工作.然而,这种弹性元件的理论研究至今还不是很充分,造成这种状况的主要原因是波纹膜片本身形状复杂,



(a) 锥型膜片



(b) 球型膜片



(c) 荷载作用

图3 锥型和球型膜片

参数很多,特别是大挠度非线性微分方程组在数学上求解极其困难.以往的理论计算可以分为两类:一类是采用壳体(或者扁壳)的大挠度(或者小挠度)方程来求解.另一类是将波纹壳(或者波纹圆板)看成是结构上的正交各向异性壳(或者正交各向异性圆平板),采用正交各向异性壳(或者正交各向异性圆平板)的大挠度(或者小挠度)方程来进行研究.

### 2.1 正交各向异性壳(板)理论

Haringx<sup>[3-6]</sup> 首先提出将波纹圆板问题转化成等效的正交各向异性板问题的思想,为波纹圆板的理论分析提供了一种新的手段. Andryewa<sup>[7]</sup> 根据波纹圆板在径向和周向有不同的刚度,以一各向异性圆板代替波纹圆板,这板在径向和周向的刚度对应于波纹圆板的刚度,而厚度、半径及材料是相同的,采用各向异性圆板大挠度方程,用 Galerkin 方法获得了适应各种波纹圆板的特征关系式, Akasaka<sup>[8]</sup> 也建立了各向异性圆板与波纹圆板弹性常数的等价关系,对于小挠度问题,求得了精确解,对于大挠度问题,采用能量法求得了近似解. Akasaka 等<sup>[9]</sup> 讨论了波纹膜

片的线性振动,求出了轴对称振型和反对称振型的固有频率,并且用能量法分析了初始拉应力对固有频率的影响. Rubin<sup>[10]</sup>采用圆柱正交异性线性板理论探讨了中心带有轴的波纹膜片的优化设计,假定轴经历了小的轴向位移或者小的角位移,那么,最大切向应力的位置将依赖于均匀压力的大小. 为了解决板壳的非线性弯曲和稳定问题,叶开源和刘人怀提出了修正迭代法,此法吸收了摄动法和常用的逐次逼近法的优点,迭代程序明确、简单、精确度高,具有较广泛的适用范围. 运用这一方法,刘人怀<sup>[11-19]</sup>求解了各种波纹圆板(全波纹圆板,具有光滑中心的波纹圆板,具有光滑中心和平面边缘的波纹圆板,具有刚性中心的波纹圆板)在各种载荷(均匀载荷,集中载荷,复合载荷)下的特征关系式. 所得结果与实验值十分符合,对波纹圆板的设计具有指导作用. 卢耘耘等<sup>[20-21]</sup>以正交异性板理论为基础,提出了一种波纹圆板非线性弯曲的 Chebyshev 级数解法,推导出具有光滑中心的波纹圆板在任意轴对称荷载作用下的弹性特征方程. 王新志<sup>[22]</sup>用最小作用量原理推导出波纹圆板的变分方程,选取波纹圆板中心最大振幅为摄动参数,采用摄动变分法,一次近似求得了波纹圆板线性振动时的固有频率,继而求得了波纹板的非线性固有频率,但只以圆平板作为例子给出了数值解. 刘人怀等<sup>[23]</sup>使用 Galerkin 方法得到了波纹圆板的特征关系及非线性自由振动的固有频率. 李东等<sup>[24]</sup>使用修正迭代法成功地解决了全波纹圆板的非线性自由振动,得到了幅频关系式,应当指出文[11]是国内第一篇关于波纹圆板的文章. Шалашилин<sup>[25]</sup>将正交各向异性板的思想推广到波纹壳中,探讨了将波纹壳等效为正交异性壳体问题,求出了等价的弹性常数. 刘人怀和王璠<sup>[26-27]</sup>从正交异性壳理论出发,研究了波纹扁球壳的非线性稳定和非线性动态屈曲现象.

## 2.2 壳体理论

众多学者直接从壳体理论出发讨论波纹板壳的特性. Панов<sup>[28]</sup>第一个讨论了波纹膜片的大挠度问题. Феодосьев<sup>[29-30]</sup>使用扁壳理论,采用 Galerkin 方法讨论了浅正弦波纹圆板的大挠度问题. Grover 等<sup>[31]</sup>对如图4所示波纹膜片进行了实验和理论分析,假定膜片是由圆板、圆环壳和锥壳组成,圆板部分使用 Way<sup>[32]</sup>的非线性解,圆环壳部分使用 Stange<sup>[33]</sup>的线性解,锥壳部分采用 Timoshenko<sup>[34]</sup>导出的线性解. Wildhack<sup>[35]</sup>讨论了 Grover-Bell 膜片,采用龙塔-库塔方法,直接积分求解了线性壳体问

题,这种计算适应于任意形状的电影,但是,由于计算困难而没有考虑到非线性因素. Dressler<sup>[36]</sup>对于另外两种厚度的 Grover-Bell 膜片,分析了膜的应力和位移,定量地表明了厚度对膜片中弯曲和拉伸的影响. Аксельрад<sup>[37-41]</sup>推导了旋转壳的非线性微分方程,借助于 Galerkin 方法,分析了深正弦波纹膜片的线性和非线性弯曲,遗憾的是没有将特征关系式的曲线用图表示出来. Hamada 和 Seguchi<sup>[42-43]</sup>使用 Reissner 方程,通过有限差分法,解决了圆板和扁锥壳的非线性弯曲. Hamada 等<sup>[44]</sup>将这一方法应用到波纹膜片上,成功地求解了 Grover-Bell 膜片及 NBS 膜片的特征曲线,获得了膜片各点的应力值. Bihari 等<sup>[45]</sup>考虑了带边缘波纹膜片的弯曲,将问题化为6个一阶非线性常微分方程,直接从微分方程求解得到了波纹膜片的挠度和径向位移,从数值分析观点考察,解决的是一个多点问题. 陈山林<sup>[46]</sup>用修正迭代法求解了波纹圆板壳体的大挠度方程,得到了具有光滑中心的浅正弦波纹圆板在均匀载荷下的弹性特征,为了得到一个较好的初始近似,引入了初始近似修正系数. Andryewa<sup>[47]</sup>应用差分方法研究了具有型面锥度的波纹膜片的非线性弯曲问题. 周哲伟等<sup>[48]</sup>讨论了圆弧形波纹膜片的特征曲线,在圆弧部分应用钱伟长<sup>[49]</sup>关于圆环壳的一般线性解,并采用中心圆板部分的最大相对挠度为摄动系数,用摄动法和矩阵联乘法联合求解获得了较为满意的结果. 宋卫平等<sup>[50]</sup>采用旋转扁壳大挠度理论研究波纹圆板在中心力作用下的变形、应力和稳定性,利用牛顿-样条函数法求解了浅正弦波纹圆板的非线性壳体方程,获得了屈曲前和屈曲后的解答.

袁鸿<sup>[51]</sup>采用摄动法和幂级数方法,研究了具有光滑中心的锯齿形和梯形波纹壳的弹性特征,得到了含中心挠度二次项的设计公式. 袁鸿、刘人怀等<sup>[52-57]</sup>采用格林函数方法,将简化的 Reissner 方程化为积分方程,成功地求解了带边缘大波纹膜片,以及具有光滑中心波纹膜片的非线性弯曲问题,并与其它理论和实验结果做了比较. 袁鸿等<sup>[58]</sup>应用轴对称旋转扁壳的基本方程,研究了在任意载荷作用下各种边界条件的具有型面锥度的浅波纹壳的非线性

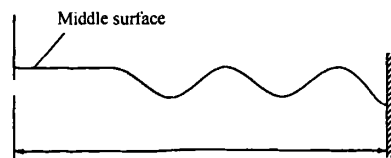


图4 Grover-Bell 膜片

弯曲问题. 袁鸿等<sup>[59]</sup>研究了在任意载荷作用下各种边界条件的波纹膜片的非线性稳定问题, 最近, 袁鸿和刘人怀<sup>[60-62]</sup>采用格林函数方法研究了带光滑中心平台的正弦波纹扁球壳的非线性自由振动及受迫振动现象. 袁鸿<sup>[63]</sup>应用轴对称旋转扁壳的非线性大挠度动力学方程, 研究了带刚性硬中心波纹扁壳的非线性自由和受迫振动问题. Wang 等<sup>[64]</sup>研究了温度变化下正弦波纹膜片的非线性自由振动.

另外, Chernopiskii<sup>[65]</sup>, Гузь 等<sup>[66]</sup>研究了厚壁波纹壳体, 以波纹幅度作为小参数, 使用摄动法从三维弹性体进行求解. Liew 等<sup>[67]</sup>采用无网格伽辽金方法和正交异性板理论研究了矩形波纹板的非线性问题. Gulgazaryan 等<sup>[68]</sup>, Grigorenko 等<sup>[69]</sup>, Semenyuk 等<sup>[70-71]</sup>, Bargmann 等<sup>[72]</sup>研究了波纹圆柱壳的非线性问题. 有关波纹膜片的设计计算可以参考 Вольмир<sup>[73]</sup>, Пономарев 等<sup>[74]</sup>, Andryewa<sup>[47]</sup> 以及刘广玉等<sup>[75]</sup>, 翁善臣等<sup>[76]</sup>的著作.

### 2.3 理论比较

用正交各向异性壳(板)处理波纹壳(圆板)的问题是一个有效的方法, 能同时讨论各种形状的波纹壳(圆板). 然而, 简化本身也带来一些不足: 第一, 对于波纹圆板, 它得到的特征缺少中心挠度的偶次项, 因而不能反映载荷反向时波纹壳(圆板)不同的刚度特征, 而当波纹数较少及挠度较大时, 这种差别可以是显著的; 第二, 它的解答不能用于研究波纹壳(圆板)的应力分布和局部失稳现象; 第三, 它只能解决分段均匀的波纹壳(圆板)问题, 即每个波的波纹深度、波纹形状必须一致, 而不能解决带有边缘波纹、波纹深浅不同的波纹壳问题. 使用薄壳非线性理论进行分析能避开以上不足, 但由于壳体大挠度方程本身的非线性和复杂性, 增加了求解难度. 钱伟长等<sup>[77]</sup>对采用环壳理论与正交异性板理论计算三圆弧波纹膜片进行了比较.

## 3 今后研究方向

虽然人们已经针对波纹膜片开展了大量的研究工作, 但目前研究方法过于单一. 在下列几个方面值得进一步研究: ①设计精密实验, 开展波纹膜片的弯曲、振动及稳定性的实验研究, 解决一直存在的实验滞后理论的困惑. ②现有研究主要针对圆形波纹膜片, 在现实中经常会遇到各种不同类型的波纹膜片, 如 MEMS 中常采用方形波纹膜片. 针对不同类型波纹膜片, 需要进一步探索有效的理论方法. ③针对各种类型波纹膜片, 编制能够精确计算波纹膜片力学

性能的软件, 用于指导波纹膜片的设计.

### 【参考文献】

- [1] HERSEY M D. Diaphragms for aeronautic instruments [R]. NACA TR, 1925, No. 165.
- [2] GRIFFITH A A. The theory of pressure capsules [R]. Great Britain Aeronautical Research Council, R&M, 1928, No. 1136.
- [3] HARINGX J A. The rigidity of corrugated diaphragms [J]. Applied Scientific Research, Series A, 1950, (2): 299-325.
- [4] HARINGX J A. Stresses in corrugated diaphragms [A] // Anniversary Volume on Applied Mechanics dedicated to Biezeno C B [C]. Stam H, Haarlem, The Netherlands, 1953: 199-213.
- [5] HARINGX J A. Nonlinearity of corrugated diaphragms [J]. Applied Scientific Research, series A, 1956, 6: 45-52.
- [6] HARINGX J A. Design of corrugated diaphragms [J]. Trans of the ASME, 1957, 79: 55-64.
- [7] АНДРЕЕВА Л Е. Расчет гофрированных мембран как анизотропных пластинок [J]. Инженерный Собрник, 1955, 21: 128-141.
- [8] AKASAKA T. On the elastic properties of the corrugated diaphragm [J]. J of the Japan Society of Aeronautical Engineering, 1955, 3 (22-23): 279-288 (in Japanese).
- [9] AKASAKA T, TAKAGISHI T. Vibration of corrugated diaphragm [J]. Bulletin of JSME, 1958, 1 (3): 215-221.
- [10] RUBIN C. Optimum design for a corrugated diaphragm clamped to a shaft undergoing axial or angular displacement [J]. J of Engineering Materials and Technology, Trans of the ASME, 1975, (10): 360-366.
- [11] 刘人怀. 波纹圆板的特征关系式 [J]. 力学学报, 1978, 1 (1): 47-52.
- [12] 刘人怀. 具有光滑中心的波纹圆板的特征关系式 [J]. 中国科学技术大学学报, 1979, 9 (2): 75-86.
- [13] 刘人怀. 波纹环形板的非线性弯曲 [J]. 中国科学 A 辑, 1984, 27 (3): 247-253.
- [14] LIU Ren-huai. Large deflection of corrugated circular plate with a plane central region under the action of concentrated loads at the center [J]. Int J Non-Linear Mechanics, 1984, 19 (5): 409-419.
- [15] LIU Ren-huai. Large deflection of corrugated circular plate with plane boundary region [J]. Solid Mechanics Archives, 1984, 9 (4): 383-406.
- [16] 刘人怀. 在复合载荷作用下波纹环形板的非线性弯

- 曲[J]. 中国科学 A 辑, 1984, 28(6): 537-545.
- [17] LIU Ren-huai. On large deflection of corrugated annular plates under uniform pressure[C]//The Advances of applied Mathematics and Mechanics in China, 1987, 1: 138.
- [18] 刘人怀. 复合载荷作用下波纹圆板的非线性分析[J]. 应用数学和力学, 1988, 9(8): 661-674.
- [19] LIU Ren-huai. Nonlinear bending of a corrugated annular plate with a plane boundary region and a non-deformable rigid body at the center under compound load[J]. Int J Non-linear Mechanics, 1993, 28(3): 353-364.
- [20] 卢耘耘, 王秀喜. 复合载荷作用下波纹圆板和环形板的大挠度问题[J]. 中国科学技术大学学报, 1989, 19(2): 200-210.
- [21] 卢耘耘, 王秀喜, 黄茂光. 任意载荷下波纹圆板大挠度弹性特征的级数解法[J]. 应用数学和力学, 1988, 9(12): 1097-1108.
- [22] 王新志, 王林祥, 胡小方. 波纹圆薄板的非线性振动[J]. 应用数学和力学, 1987, 8(3): 237-245.
- [23] LIU Ren-huai, LI Dong. On the non-linear bending and vibration of corrugated circular plates[J]. Int J Non-Linear mechanics, 1989, 24(3): 165-176.
- [24] 李东, 刘人怀. 修正迭代法在波纹圆板非线性振动问题中的应用[J]. 应用数学和力学, 1990, 11(1): 13-21.
- [25] ШАЛАШИЛИН В И. К расчету оболочек, выполненных из гофрированного материала[M]//В кн, Проблемы устойчивости в строительной механике. Москва: Стройиздат, 1965: 339-346.
- [26] LIU Ren-huai, WANG Fan. Nonlinear stability of corrugated shallow spherical shell[J]. Int J of Applied Mechanics and Engineering, 2005, 10(2): 295-309.
- [27] 王璠, 刘人怀. 波纹扁球壳的非线性动态屈曲[J]. 振动工程学报, 2005, 18(4): 426-432.
- [28] ПАНОВ Д Ю. О больших прогибах круглых мембран со слабым гофром [J]. Прикладная Математика и Механика, 1941, 5(2): 303.
- [29] ФЕОДОСЬЕВ В И. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой [J]. Прикладная Математика и Механика, 1945, 9(5): 389.
- [30] ФЕОДОСЬЕВ В И. 精密仪器弹性软件的理论和计算[M]. 卢文达, 译. 北京: 科学出版社, 1965.
- [31] GROVER H J, BELL J C. Some evaluations of stresses in aneroid capsules[J]. Proceedings of the Society of Experimental stress Analysis, 1948, 5: 125-131.
- [32] WAY S. Bending of circular plates with large deflection [J]. Trans of the ASME, 1934, 56: 627.
- [33] STANGE K. Der spannungszusang einer kreisringschall [J]. Ingenieur-Archiv, 1931, 2: 47-91.
- [34] TIMOSHENKO S. Theory of Plates and shells[M]. New York: Mcgraw-Hill, 1940.
- [35] WILDHACK W A. Investigations of the properties of corrugated diaphragm [J]. Tran of the ASME, 1957, (1): 65-82.
- [36] DRESSLER R F. Bending and stretching of corrugated diaphragms[J]. J of Basic Engineering, Trans of the ASME, 1959, 81: 651-659.
- [37] АКСЕЛЬРАД Э Л. Уравнения деформации оболочек вращения и изгиба тонкостенных стержней при больших упругих перемещениях [J]. Механика и Машиностроение, Известия АН СССР, 1960, (4): 84-92.
- [38] АКСЕЛЬРАД Э Л. Изгиб и потеря устойчивости тонкостенных труб при лруб и гидростатическом давлении [J]. Механика и Машиностроение, Известия АН СССР, 1962, (1): 98-114.
- [39] АКСЕЛЬРАД Э Л. Расчет гофрированной мембраны как непологой оболочки [J]. Механика и Машиностроение, Известия АН СССР, 1963, (5): 67-76.
- [40] АКСЕЛЬРАД Э Л. Большие прогибы гофрированной мембраны как непологой оболочки [J]. Механика и Машиностроение, Известия АН СССР, 1964, (1): 46-53.
- [41] АКСЕЛЬРАД Э Л. периодические решения осесимметричной задачи теории оболочек [J]. Механика Твёрдого Тела, 1966, (2): 77-83.
- [42] HAMADA M, SEGUCHI Y. On the accuracy of the v. Karman equations for axisymmetric non-linear bending for circular plates[J]. Trans Japan Soc Aero Space Sci, 1965, 8(12): 6-14.
- [43] HAMADA M, SEGUCHI Y. On the strength of a disk spring[J]. Bulletin of JSME, 1966, 9(34): 492-502.
- [44] HAMADA M. Numerical method for nonlinear axisymmetric bending of arbitrary shell of revolution and large deflection analyses of corrugated diaphragm and bellows [J]. Bulletin of JSME, 1968, 11(43): 24-33.
- [45] BINARI I, ELBERT A. Deformation of circular corrugated plates and shells [J]. Periodica Polytechnica Mechanical Engineering, Mashinostroenie, 1978, 22(2): 123-143.
- [46] 陈山林. 浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度弹性特征[J]. 应用数学和力学, 1982, 1(2): 261-272.

- [47] ANDRYEWA L E. Elastic elements of instruments[M]. Moscow: Masgiz, 1981 (in Russian).
- [48] 周哲伟, 王 蜀. 圆弧形波纹薄片的矩阵联乘解法[J]. 应用数学和力学, 1985, 6(6): 551 - 566.
- [49] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的一般解[J]. 应用数学和力学, 1980, 1(3): 287 - 299.
- [50] 宋卫平, 叶开沅. 中心集中载荷作用下波纹圆板的变形应力和稳定性研究[J]. 中国科学 A 辑, 1989, (1): 40 - 47.
- [51] 袁 鸿. 波纹壳的摄动解法[J]. 应用力学学报, 1999, 16(1): 144 - 148.
- [52] LIU Ren-huai, YUAN Hong. Nonlinear bending of corrugated annular plate with large boundary corrugation[J]. Applied Mechanics and Engineering, 1997, 2(3): 353 - 367.
- [53] 袁 鸿, 刘人怀. 均布载荷作用下带边缘大波纹膜片的非线性弯曲[J]. 力学学报, 2003, 35(1): 14 - 20.
- [54] 袁 鸿, 刘人怀. 复合载荷作用下带边缘大波纹膜片的非线性弯曲[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(4): 367 - 372.
- [55] 袁 鸿, 张湘伟. 集中载荷作用下具有光滑中心波纹膜片的非线性分析[J]. 力学季刊, 2003, 24(1): 124 - 128.
- [56] 袁 鸿, 刘人怀. 复合载荷作用下具有光滑中心波纹膜片的非线性分析[J]. 应用力学学报, 2003, 20(1): 27 - 30.
- [57] 袁 鸿, 刘人怀. 均布载荷作用下具有光滑中心波纹膜片的非线性分析[J]. 应用力学学报, 2004, 21(1): 117 - 120.
- [58] 袁 鸿, 张湘伟. 波纹壳的格林函数方法[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(7): 763 - 769.
- [59] 袁 鸿, 张湘伟, 刘人怀. 波纹膜片的非线性稳定[J]. 工程力学, 2005, 26(6): 202 - 206.
- [60] 袁 鸿, 刘人怀. 均布载荷作用下波纹扁壳的非线性振动[J]. 应用数学和力学, 2007, 28(5): 514 - 520.
- [61] 袁 鸿. 复合载荷作用下波纹扁壳的非线性振动[J]. 振动与冲击, 2007, 26(12): 28 - 31.
- [62] 袁 鸿. 波纹扁壳非线性振动的格林函数方法[J]. 中国科学 G 辑, 2008, 38(5): 592 - 599.
- [63] 袁 鸿. 带刚性硬中心波纹扁壳的非线性振动[J]. 暨南大学学报: 自然科学版, 2008, 29(3): 262 - 267.
- [64] WANG Y G, GAO D, WANG X Z. On the nonlinear vibration of heated corrugated circular plates with shallow sinusoidal corrugations[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2008, 50(6): 1082 - 1089.
- [65] CHERNOPIISKII D I. Stressed state of thick-walled corrugated spherical shells[J]. Translated from Prikladnaya Mekhanika, 1979, 15(10): 128 - 133.
- [66] ГУЗЬ А Н, НЕМИЩ Ю Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости [M]. Киев, 1982.
- [67] LIEW K M, PENG L X, KITIPORNCHAI S. Nonlinear analysis of corrugated plates using a FSDT and a mesh-free method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(21 - 24): 2358 - 2376.
- [68] GULGAZARYAN G R, GULGAZARYAN L G. Vibrations of a corrugated orthotropic cylindrical shell with free edges[J]. International Applied Mechanics, 2006, 42(12): 1398 - 1413.
- [69] GRIGORENKO Y M, ROZHOK L S. Stress analysis of circumferentially corrugated hollow orthotropic cylinders[J]. International Applied Mechanics, 2006, 42(12): 1389 - 1397.
- [70] SEMENYUK N P, BABICH I Y. Stability of longitudinally corrugated cylindrical shells under uniform surface pressure[J]. International Applied Mechanics, 2007, 43(11): 1236 - 1247.
- [71] SEMENYUK N P, ZHUKOVA N B, ASTAPCHUK V V. Stability of corrugated composite noncircular cylindrical shells under external pressure[J]. International Applied Mechanics, 2007, 43(12): 1380 - 1389.
- [72] BARGMANN H W. On the stability of thin-walled, corrugated, circular cylindrical shells under external pressure[J]. Acta Mechanica, 2008, 195(1 - 4): 117 - 128.
- [73] ВОЛЬМИР А С. 柔韧板与柔韧壳[M]. 卢文达, 译. 北京: 科学出版社, 1963.
- [74] ПОНОМАРЕВ С Л, АНДРЕЕВА Л Е. Расчет упругих элементов машин и приборов [M]. Москва: Машиностроение, 1980.
- [75] 刘广玉, 庄肇康. 仪表弹性元件[M]. 北京: 国防工业出版社, 1981.
- [76] 翁善巨, 等. 仪表弹性元件设计基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 1982.
- [77] 钱伟长, 樊大钧, 黄 黔. 环壳理论与直交异性板理论在计算三圆弧波纹膜片上的比较[J]. 应用数学和力学, 1984, 5(1): 41 - 48.

[责任编辑:王景周]