第30卷第5期
2009年10月

暨南大学学报(自然科学版)
Journal of Jinan University(Natural Science)

Vol.30 No.5
Oct. 2009

关于约数和的一个不等式

廖思泉
(茂名学院数学系,广东 茂名 525000)

[摘 要] 对于正整数k和n,设$\delta(k)$是k的不同约数之和,$f(n)=\delta(1)+\delta(2)+\cdots+\delta(n)$. 证明了:存在无穷多个正整数$n$,使得$\delta(f(n))\geqslant n(n+1)$.

[关键词] 约数和; 复合函数; 不等式
[中图分类号] O156 [文献标识码] A [文章编号] 1000-9965(2009)05-0496-02

An inequality on the sum of divisors

LIAO Si-quan
(Department of Mathematics, Maoming College, Maoming, Guangdong 525000, China)

[**Abstract**] For any positive integer k and n, let $\delta(k)$ denote the sum of distinct divisors of k, and let $f(n)=\delta(1)+\delta(2)+\cdots+\delta(n)$, there exist infinitely many positive integers n satisfying $\delta(f(n))\geqslant n(n+1)$.

[**Key words**] sum of divisors; composite function; inequality

对于正整数k,设$\delta(k)$是k的不同约数之和. 这是一类基本而又重要的数论函数,历史上著名的完全数问题等迄今尚未解决的难题都与此类函数有关[1]. 对于正整数n,设

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\delta(k) \tag{1}$$

2006年,BENCZE M[2]曾经提出:当$n\geqslant 2$时,必有

$$\delta(k(n))\geqslant n((n+1)) \tag{2}$$

最近SÁNDOR J[3]给出了不等式(2)的反例,即当$n=7$时(2)不成立;并且推测:当n充分大时,不等式(2)不成立. 对此,本文证明了:

定理 *存在无穷多个正整数n,可使不等式(2)成立.*

显然,上述定理否定了Sándor J的猜测. 该定理的证明要用到下列引理:

1 若干引理

引理1 当$k>1$时,$\delta(k)\geqslant k+1$;当$2\mid k$时,$\delta(k)\geqslant\frac{3}{2}k$;当$3\mid k$时,当时,$\delta(k)\geqslant\frac{4}{3}k$;当$6\mid k$时,$\delta(k)\geqslant 2k$.

证明 当$k>1$时,k至少有2个不同的约数1和k,故有$\delta(k)\geqslant k+1$. 同时,当$k>1$时,如果

$$k=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_t^{r_t} \tag{3}$$

是k的标准分解式,则 从文献[1]的定理1.9.1可知:

$$\delta(k)=k\prod_{i=1}^{t}\left(1+\frac{1}{p_i}+\cdots+\frac{1}{p_i^{r_i}}\right) \tag{4}$$

当$2\mid k$时,k有素因数2,故从(4)可知$\delta(k)\geqslant\frac{3}{2}k$. 同理可证$3\mid k$以及$6\mid k$时的情况. 证完.

[收稿日期] 2009-04-07
[基金项目] 国家自然科学基金项目(10271104);广东省自然科学基金项目(011781)
[作者简介] 廖思泉(1965-),男,讲师,研究方向:数论和代数学

引理2　对于任何正整数 m,$\delta(m^2)$ 都是奇数.

证明　因为 $\delta(1)=1$,所以本引理在 $m=1$ 时成立. 当 $m>1$ 时,设 $k=m^2$. 此时 k 的标准分解式(3)中的 $r_i(i=1,2,\cdots,t)$ 都是偶数,并且从式(4)可得

$$\delta(m^2)=\delta(k)=\prod_{i=1}^{t}\frac{p_i^{r_i+1}-1}{p_i-1}. \qquad (5)$$

由于 r_i 是偶数时,$(p_i^{r_i+1}-1)/(p_i-1)=1+p_i+\cdots+p_i^{r_i}$ 必有奇数,故从式(5)可知 $\delta(m^2)$ 是奇数. 证完.

引理3　对于大于1的正整数 m,$f(m^2-1)$ 和 $f(m^2)$ 中必有一个偶数.

证明　因为从式(1)可知 $f(m^2)=f(m^2-1)+\delta(m^2)$,又从引理2可知其中 $\delta(m^2)$ 必为奇数,故从上式可知 $f(m^2-1)$ 和 $f(m^2)$ 中必有一个偶数. 证完.

引理4　当 $n\geqslant 4$ 时,$f(n)>\frac{25}{36}n(n+1)$.

证明　对于正整数 t,设

$$g(t,j)=\sum_{i=0}^{t}\delta(6i+j),j=0,1,\cdots,5 \qquad (6)$$

根据引理1可知

$$\begin{aligned}&\delta(6i)\geqslant 12i,i\geqslant 1;\ \delta(6i+1)\geqslant 6i+2,i\geqslant 1,\\&\delta(6i+2)\geqslant 9i+3,i\geqslant 0;\ \delta(6i+3)\geqslant\\&\quad 8i+4,i\geqslant 0,\\&\delta(6i+4)\geqslant 9i+6,i\geqslant 0;\\&\delta(6i+5)\geqslant 6i+6,i\geqslant 0.\end{aligned} \qquad (7)$$

从式(6)和式(7)可得

$$\begin{aligned}&\delta(t,0)\geqslant 6t^2+6t,\quad g(t,1)\geqslant 3t^2+5t+1,\\&g(t,2)\geqslant\frac{9}{2}t^2+\frac{15}{2}t+3,\quad g(t,3)\geqslant 4t^2+8t+4,\\&g(t,4)\geqslant\frac{9}{2}t^2+\frac{21}{2}t+6,\quad g(t,5)\geqslant 3t^2+9t+6.\end{aligned} \qquad (8)$$

从式(1)和式(6)可知

$$f(n)=\sum_{j=0}^{5}g\left(\left[\frac{n-j}{6}\right],j\right), \qquad (9)$$

其中 $[(n-j)/6]$ 是 $(n-j)/6$ 的整数部分. 已知任何给定的正整数 $n(n\geqslant 6)$ 都可唯一地表成 $n=6s+r$,其中 s 是正整数,r 是适合 $0\leqslant r\leqslant 5$ 的整数. 当 $n=6s+5$,其中 $s\geqslant 5$ 时,由于

$$\left[\frac{n-j}{6}\right]=s,\quad j=0,1,\cdots,5 \qquad (10)$$

故从式(8)、(9)和(10)可得

$$f(n)=f(6s+5)=\sum_{j=0}^{5}g(s,j)\geqslant$$

$$25s^2+46s+20>\frac{25}{36}(36s^2+66s+30)=$$

$$\frac{25}{36}(6s+5)(6s+5)=\frac{25}{36}n(n+1). \qquad (11)$$

从式(11)可知本引理在 $n=6s+5$ 且 $s\geqslant 5$ 时成立. 又因 $f(5)=21$,$f(11)=29$,$f(17)=238$,$f(23)=431$,$f(29)=690$,所以在 $n=6s+5$ 且 $0\leqslant s\leqslant 4$ 时本引理也成立.

同样,从式(8)和式(9)可得

$$f(n)\geqslant\begin{cases}25s^2+8s-1, & 当 n=6s 时;\\25s^2+14s+1, & 当 n=6s+1 时;\\25s^2+23s+4, & 当 n=6s+2 时;\\25s^2+31s+8, & 当 n=6s+3 时;\\25s^2+40s+14, & 当 n=6s+4 时.\end{cases} \qquad (12)$$

因此从式(12)可知:当 $n=6s+r(r=0,1,\ldots,4)$ 且 s 是正整数时本引理成立. 综上所述可知:当 $n\geqslant 5$ 时本引理成立. 另外,由于 $f(4)=15$,所以本引理在 $n=4$ 时也成立. 证完.

2　定理的证明

设 m 是大于2的正整数. 根据引理3可知存在正整数 n 适合

$$m=\begin{cases}m^2-1, & 当 f(m^2-1) 是偶数时;\\m^2, & 当 f(m^2) 是偶数时.\end{cases} \qquad (13)$$

因为 $m\geqslant 3$,从式(13)可知 $n\geqslant 8$,所以从引理4可知此时 $f(n)$ 是适合 $f(n)>\frac{25}{36}n(n+1)$ 的偶数. 因此根据引理1可得

$$\delta(f(n))\geqslant\frac{3}{2}f(n)\geqslant\frac{75}{72}n(n+1)>n(n+1). \qquad (14)$$

由于适合式(13)的正整数 n 有无穷多个,故从式(14)可知:存在无穷多个正整数 n 可使不等式式(2)成立. 定理证完.

[参考文献]

[1] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京:科学出版社,1979,13-14.

[2] BENCZE M. Open question 2246 [J]. Octogon Math Mag, 2006, 14(2):857.

[3] SÁNDOR J. On inequalities for $\delta(1)+\delta(2)+\cdots+\delta(n)$[J]. Octogon Math Mag, 2007, 15(1), 505-508.

[责任编辑:王景周]