

# SA-混合网络模型的构造及其性质

苏 静, 姚 兵

(西北师范大学 数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

[摘 要] 目的:设计、构造若干无标度网络并验证其无标度性,比较原网络与新网络的发展速度. 方法:用迭代法在 Sierpiandki 网络与 2 维 - Apollonian 网络的基础上构造 SA - 混合网络模型,验证新网络的度分布服从幂指数在 2 到 3 之间的幂律分布. 结果:SA - 混合网络的度分布幂指数约为 2. 63,位于 2 和 3 之间,且 SA - 混合网络的发展速度比 Sierpiandki 网络与 Apollonian 网络的发展速度快. 结论:无标度性质对无标度网络之间的混合网络具有封闭性.

[关键词] Sierpinski 网络; Apollonian 网络; 度累积分布; 速度

[中图分类号] O157.5 [文献标志码] A [文章编号] 1000 - 9965(2016)05 - 0442 - 05

doi:10. 11778/j. jdx. 2016. 05. 017

## Construction and property of SA-mixed network models

SU Jing, YAO Bing

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

[Abstract] **Aim:** To design, construct mixed-networks between a number of scale-free networks and verify the scale-free property, to compare the network growth speed of the original networks and the mixed-networks. **Methods:** SA-mixed network model is constructed by iterative method on the basis of Sierpinski networks and 2-dimension Apollonian networks, to verify the mixed-networks degrees distribution obey the power-law distribution of between 2 to 3. **Results:** The distribution power of SA-mixed networks is about 2. 63, between 2 and 3, and the growth speed of the mixed networks is faster than Sierpinski and apollonian networks. **Conclusion:** Scale-free properties have closeness on the mixe-networks between scale-free networks.

[Key words] sierpinski networks; apollonian networks; degree cumulative distribution; velocity

### 1 引言及概念

无标度网络的概念是随着对复杂网络的深入研究而提出的,大量研究表明:绝大部分真实网络都是无标度网络<sup>[1]</sup>,因特网、新陈代谢网络、蛋白质网络和人际关系网络等都具有无标度特性. 近年来,

随着物联网的急速发展,物联网中的各个子网络也表现出无标度的特征,复杂网络的研究变得更加倾向于无标度网络<sup>[2-4]</sup>. 网络中与某个节点相连的节点数称为这个节点的度. 无标度网络的大部分节点的度都很小,只有极少数的中心节点度非常之大. 例如,在万维网中,中心节点可能是百度或千度以

[收稿日期] 2016 - 04 - 23

[基金项目] 国家自然科学基金项目(61163054;61662066;61363060)

[作者简介] 苏 静(1993 - ),女,研究方向:复杂网络

通信作者:姚 兵,男,教授,研究方向:图着色与标号及复杂网络, E-mail:yybb918@163. com

上;在互联网中,新浪这样的门户网站则是一些大型数据中心.随机选择网络中的1个节点,其度为 $k$ 的概率称为网络的度分布,已知无标度网络的度分布服从幂律分布,即 $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , $\gamma$ 为幂指数<sup>[5]</sup>.为了更好地刻画和认识无标度网络,通常建立动态模型来模拟真实网络,研究其拓扑结构.无标度网络对意外故障有强大的承受能力,即使受到随机攻击后,也有很大的概率继续保持较强的连通性.因此,无标度网络拓扑结构的研究更受重视.章忠志等<sup>[6-7]</sup>通过迭代算法给出具有无标度性质的 Sierpinski 网络和 Apollonian 网络的模型.无标度网络之间的混合模型是否仍然具有无标度性质?在无标度网络的演化过程中,根据现实需要添加其他网络,是否能改变其无标度特性?这里通过构造二者的 SA-混合网络模型来探索网络对无标度性的封闭.

SA-混合网络模型的外层 Sierpinski 网络是在 Sierpinski 分形的基础上构建的<sup>[6]</sup>,其构造过程的算法是:当 $t=0$ 时, $S(0)$ 是由3个节点构成的1个内三角形,然后,在 $S(0)$ 的三角形中加入3个新节点,这3个新节点彼此相连构成1个新三角形,并且新三角形边的两端点连接到原三角形的1个节点上,即得到 $S(1)$ .当 $t \geq 1$ 时, $S(t)$ 可由 $S(t-1)$ 得到,在迭代步骤中,三角形的3个节点不全是新加入点的称之为活动三角形.对 $S(t-1)$ 的所有活动三角形中加入彼此构成三角形的3个新节点,再连接三角形各边的两端点与活动三角形的节点,便可构造出 $S(t)$ .此迭代增长过程可一直重复下去,直到得到所期望的网络模型.图1(a)给出 $t=2$ 时刻的 Sierpinski 网络模型.文献[6]已计算出 Sierpinski 网络的度累积 $P_{cum}(k) = 6(k-1)^{-[1+\frac{\ln 2}{\ln 3}]}$ .可以看出 $P_{cum}(k) \sim k^{1-\gamma}$ ,Sierpinski 网络的度分布服从幂律分布,此时 $2 < \gamma = 2 + \frac{\ln 2}{\ln 3} < 2.63$ ,显然 Sierpinski 网络具有无标度性.

Apollonian 网络的定义是以 Apollonian 填充问题作为背景而提出来的<sup>[7]</sup>.2-维 Apollonian 网络的构造算法:初始时刻 $t=0$ , $A(0)$ 有3个节点与3条边构成1个内三角形.当 $t \geq 1$ 时, $A(t)$ 是通过在 $A(t-1)$ 添加节点和边而得到.对 $A(t-1)$ 的每个活动三角形中心添加1个新节点,并连接新节点与活动三角形的3个节点,新产生的3个三角形又成为下一时刻网络演化过程中的活动三角形.图1(b)是 Apollonian 网络模型在 $t=2$ 时刻的情形.由文献[7]可知,Apollonian 网络的度累积满足 $P_{cum}(k)$

$\sim k^{1-\gamma}$ , $\gamma \approx 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}$ , $2 < \gamma < 2.58$ .以上结果表明 Apollonian 网络也是无标度网络.

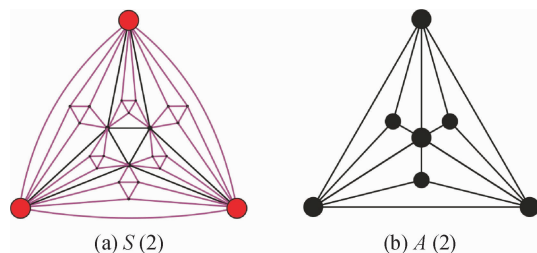


图1 图(a)为 $t=2$ 时刻的 Sierpinski 网络,图(b)为 $t=2$ 时刻的 Apollonian 网络

Fig. 1 (a) is the construction of the Sierpinski networks at  $t=2$ , (b) is the construction of the Apollonian networks at  $t=2$

显然, Sierpinski 网络与 Apollonian 网络都是确定性无标度网络.本研究沿用文献[6]中的递归构造思想,提出基于 Sierpinski 网络与 Apollonian 网络的 SA-混合网络模型,研究探讨该模型的无标度特性,并且通过计算文献[9]中提出的动态网络发展速度,比较3种网络模型的发展快慢程度,以便根据不同的需要,选择建立相应的网络.

## 2 SA-混合网络模型

### 2.1 SA-混合模型的构造算法

记 $t$ 时刻的 SA-混合网络模型为 $S(t, A(m))$ .初始网络 $S(0, A(m))$ 是平面上的1个内三角形,其迭代过程与 Sierpinski 网络相似,区别在于: Sierpinski 网络每次在活动三角形内部加入彼此构成三角形的3个节点,而 SA-混合网络模型则是每次向活动三角形内部填充1个 $m$ 时刻的 Apollonian 网络 $A(m)$ ,这里限制 $m$ 是 $0 \leq m \leq t$ 的固定常数.然后将 $A(m)$ 最外界边的两端点分别与 $S(t)$ 相连,依次下去即可完成 SA-混合网络模型的构造.图-2所示,明显地,当 $m=0$ 时,SA-混合网络即为 Sierpinski 网络,整个过程由以下算法表述:

初始化:  $t=0$ ,  $S(0, A(m))$ 有3个节点与3条边构成平面上1个内三角形.

迭代步骤:  $t \geq 1$ ,  $S(t, A(m))$ 可由 $S(t-1, A(m))$ 继续添加网络 $A(m)$ 与边而得到,对 $S(t-1, A(m))$ 的每个活动三角形中心添加1个 $m$ 时刻的 Apollonian 网络 $A(m)$ ,并分别连接 $A(m)$ 最外界边的两端点与该活动三角形的3个节点,新产生的6个三角形又成为下一时刻网络演化过程中的

活动三角形.

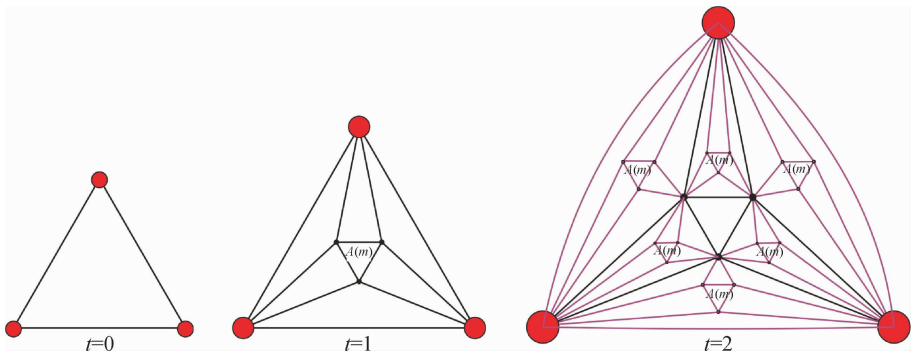


图 2 SA-混合网络模型的前 3 步迭代过程

Fig. 2 The construction of the SA-mixed networks at the first three steps

对任意  $t$  时刻 SA-混合网络模型  $S(t, A(m))$ , 用记号  $n_v(t)$  和  $n_e(t)$  分别表示网络的节点集合和边集合, 以及其元素个数  $n_v(t) = |V(t)|$ ,  $n_e(t) = |E(t)|$ . 将 Sierpinski 网络与 Apollonian 网络混合过程中重复的节点数和边数分别记作  $\Delta_v(t)$ ,  $\Delta_e(t)$ . 不难发现,  $\Delta_v(t) = \Delta_e(t) = \frac{3}{5}(6^t - 1)$ . SA-混合网络模型的构造中  $t$  时刻新产生的活动三角形记为  $\Delta L_\Delta(t) = 6^t$ , 并且由文献[6]得知: Sierpinski 网络的总节点数和总边数分别为  $n_v^S(t) = \frac{3 \cdot 6^t + 12}{5}$ ,  $n_e^S(t) = \frac{9 \cdot 6^t + 6}{5}$ . 文献[7]也已计算出 2-维 Apollonian 网络的节点数和边数为  $n_v^A(m) = \frac{3^m + 5}{2}$ ,  $n_e^A(m) = \frac{3(3^m + 1)}{2}$ . 因此, 可计算 SA-混合网络模型的总节点数和总边数分别为

$$\begin{aligned} n_v(t) &= n_v^S(t) + n_v^A(m) \cdot L_\Delta(t) - \Delta_v(t) = \\ &= \frac{3 \cdot 6^t + 12}{5} + \frac{3^m + 5}{2} \cdot \frac{1}{5}(6^t - 1) - \frac{3}{5}(6^t - 1) = \\ &= \frac{6^t(3^m + 5) - 3^m + 25}{10} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} n_e(t) &= n_e^S(t) + n_e^A(m) \cdot L_\Delta(t) - \Delta_e(t) = \\ &= \frac{9 \cdot 6^t + 6}{5} + \frac{3(3^m + 1)}{2} \cdot \frac{1}{5}(6^t - 1) - \frac{3}{5}(6^t - 1) = \\ &= \frac{6^t(3^{m+1} + 15) - 3^{m+1} + 15}{10} \end{aligned} \tag{2}$$

当  $t$  足够大时,  $S(t, A(m))$  的密度(也称为平均度)  $\langle k \rangle = \frac{2n_e(t)}{n_v(t)} \propto 6$ , 这说明 SA-混合网络模型是 1 个稀疏网络. 另外, SA-混合网络模型  $S(t, A(m))$  的最大度  $\Delta(S(t, A(m))) = 3 \cdot 2^{m-1} + 3^t - 1$ , 最小度  $\delta(S(t, A(m))) = 3$ .

2.2 SA-混合模型的累积度分布

设  $A(m)$  在初始时刻的 3 个节点于  $t_i$  时刻进入 SA-混合网络模型, 此时这个节点的度为  $3 \cdot 2^{m-1} + 2$ . 在  $t$  时刻新产生的活动三角形个数为  $\Delta L_\Delta(t) = 6^t$ , 令  $k_i(t)$  表示  $t$  时刻节点  $i$  的度数,  $k_i(t)$  与  $\Delta L_\Delta(t)$  的关系满足  $\Delta L_\Delta(t) = k_i(t) - (3 \cdot 2^{m-1} + 2)$ . 在  $t$  时刻, 节点  $i$  的度为  $k_i(t) = 3^{t-t_i+1} + 3 \cdot 2^{m-1} - 1$ . 得到  $S(t, A(m))$  的度谱如表 1.

表 1 SA-混合网络模型的度谱

Table 1 The degree spectrum of SA-mixed network models

$d$	3	6	...	$3 \cdot 2^{m-1}$	$3 \cdot 2^{m-1} + 2$	$3 \cdot 2^{m-1} + 8$	...	$3 \cdot 2^{m-1} + 3^t - 1$
$n_d(t)$	$\frac{3^{m-1}(6^t - 1)}{5}$	$\frac{3^{m-2}(6^t - 1)}{5}$	...	$\frac{3^{m-m}(6^t - 1)}{5}$	$3 \cdot 6^{t-1}$	$3 \cdot 6^{t-2}$	...	$3 \cdot 6^{t-t}$

这里的度为  $3 \cdot 2^{m-1} + 2$  的点为 Sierpinski 网络与 Apollonian 网络混合时的公共点, 在文献[8]中, Dorogovtsev 针对累积度分布  $P_{cum}(k)$  的定义, 即网络中节点度大于等于  $k$  的概率. 给出  $P_{cum}(k) \sim k^{1-\gamma}$ , 其中  $2 \leq \gamma \leq 3$ , 即有表达式

$$P_{cum}(k) = \sum_{k' \geq k} \frac{|V(k', t)|}{n_v(t)} \propto k^{1-\gamma} \tag{3}$$

$|V(k', t)|$  指度为  $k'$  的顶点的个数<sup>[8]</sup>. 下面计算 SA-混合网络累积度分布

$$P_{cum}(k) = \sum_{k' \geq k} \frac{|V(k', t)|}{n_v(t)} = \frac{(3^m + 5)6^\tau - 3^m + 25}{(3^m + 5)6^t - 3^m + 25} \quad (4)$$

将  $\tau = t + 1 - \frac{\ln(k - 3 \cdot 2^{m-1} + 1)}{\ln 3}$  代入上式, 得

$$P_{cum}(k) = \frac{6(3^m + 5)6^t(k - 3 \cdot 2^{m-1} + 1)^{-\frac{\ln 6}{\ln 3}} - 3^m + 25}{(3^m + 5)6^t - 3^m + 25}$$

对足够大的  $t$ , 则有  $P_{cum}(k) \propto 6k^{-(1+\frac{\ln 6}{\ln 3})}$ . 此时  $2 < \gamma = 2 + \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 2.63 < 3$ . 故 SA-混合网络模型的累积度分布服从幂律分布,  $S(t, A(m))$  混合网络具有无标度特性.

### 2.3 SA-混合网络模型的速度

文献<sup>①</sup>定义一个动态网络模型  $N(t)$  的速度为

$$V_{el}(N(t)) = \frac{\partial n_v(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial n_e(t)}{\partial t}. \quad (5)$$

这里以此标准来衡量 SA-混合网络、Sierpinski 网络和 Apollonian 网络发展的快慢程度. 其中, SA-混合网络的速度为

$$\begin{aligned} V_{el}(S(t, A(m))) &= \frac{\partial n_v(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial n_e(t)}{\partial t} = \\ &= \frac{(3^m + 5) \cdot 6^t \ln 6}{10} \cdot \frac{(3^{m+1} + 15) \cdot 6^t \ln 6}{10} = \\ &= (3^m + 5)(3^{m+1} + 15) \left( \frac{6^t \ln 6}{100} \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Sierpinski 网络的速度为

$$\begin{aligned} V_{el}(S(t)) &= \frac{\partial n_v^S(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial n_e^S(t)}{\partial t} = \frac{3}{5} 6^t \ln 6 \cdot \\ &= \frac{9}{5} 6^t \ln 6 = \frac{27}{25} (6^t \ln 6)^2, \end{aligned}$$

Apollonian 网络的速度等于

$$\begin{aligned} V_{el}(A(t)) &= \frac{\partial n_v^A(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial n_e^A(t)}{\partial t} = \frac{1}{2} 3^t \ln 3 \cdot \\ &= \frac{3}{2} 3^t \ln 3 = \frac{3}{4} (3^t \ln 3)^2. \end{aligned}$$

明显地, 3 个速度满足

$$V_{el}(S(t, A(m))) > V_{el}(S(t)) > V_{el}(A(t)).$$

说明构造的 SA-混合网络模型在信息传播、物资运送、疫苗免疫等对网络发展速度要求较高的方面显得更有优势.

## 3 SA-混合网络模型的推广

2.1 节提出的特殊 SA-混合网络模型在构造的

过程中, 是对任意  $t$  时刻新产生的  $6^t$  个活动三角形的每个都加入  $A(m)$  而推广到一般. 一般的 SA-混合网络模型的构造是指迭代过程中不是对每个活动三角形填充  $A(m)$ , 而只对  $\lfloor p \cdot 6^t \rfloor$  ( $0 < p \leq 1$ ) 个活动三角形填充  $A(m)$ . 不难发现, 当  $p = 1$  时, 一般的 SA-混合网络模型是 2.1 节讨论的特殊 SA-混合网络模型. 因此, 一般的 SA-混合网络模型更具有随机构造的特点, 更能逼近真实网络. 下面验证一般的 SA-混合网络模型具有无标度性. 采用类似 2.1 节的计算方法, 先计算节点数目和边数目

$$\begin{aligned} n_v(t) &= \frac{3 \cdot 6^t + 12}{5} + \lfloor p \cdot 6^t \left( \frac{3^m + 5}{2} - 3 \right) \rfloor, \\ n_e(t) &= \frac{9 \cdot 6^t + 6}{5} + \lfloor p \cdot 6^t \left( \frac{3(3^m + 1)}{2} - 3 \right) \rfloor. \end{aligned}$$

进而, 由一般的 SA-混合网络模型的度谱可以得到度累积分布

$$P_{cum}(k) = \frac{3 \cdot 6^\tau + 5 \lfloor p \cdot 6^{\tau-1} \rfloor \left( \frac{3^m + 5}{2} - 3 \right) + 12}{3 \cdot 6^t + 5 \lfloor p \cdot 6^{t-1} \rfloor \left( \frac{3^m + 5}{2} - 3 \right) + 12}$$

将  $\tau = t + 1 - \frac{\ln(k - 3 \cdot 2^{m-1} + 1)}{\ln 3}$  代入上述等式仍然可以得到

$$P_{cum}(k) \propto 6k^{-(1+\frac{\ln 2}{\ln 3})},$$

其中  $2 < \gamma = 2 + \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 2.63 < 3$ , 则可断言: 一般的 SA-混合网络模型具有无标度特性.

## 4 总结

针对具有无标度性质的 Sierpinski 网络和 Apollonian 网络, 采用迭代法构造出新的 SA-混合网络模型, 新网络仍然是无标度网络, 拓宽了无标度网络的应用范围. SA-混合网络模型, 是在 Sierpinski 网络的任意  $t$  时刻加入  $m$  时刻的 Apollonian 网络演化而得到, 这里的  $m$  是调节参数, 换言之, 可以往 Sierpinski 网络的活动三角形中加入随时间增长的 Apollonian 网络  $A(m_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, t$ ), 这样能更好地模拟现实网络, 且可采用逼近这种随机情况的方法, 令 SA-混合网络整个演化过程加入的  $A(m_i)$  中  $i$  最小的为  $A_{\min}(m_i)$ , 最大的  $i$  对应  $A_{\max}(m_i)$ . 我们知道, 随机的  $S(t, A(m_i))$  的节点数、边数, 网络发展速度等指标的值都是夹在  $S_{\min}(t, A(m_i))$  与  $S_{\max}(t, A(m_i))$  两类混合模型这些指标值之间的,

① YAO Bing, WANG Xiaomin, SU Jing, et al. Methods and problems attempt in Scale-Free Models from complex networks[J]. Submitted

并且容易验证  $S_{\min}(t, A(m_i))$  与  $S_{\max}(t, A(m_i))$  均为无标度网络模型, 故猜想  $S(t, A(m_i)) (i = 0, 1, \dots, t)$  也具有无标度特性. 自然地, 可以将 SA-混合网络模型推广到广义 SG-混合网络模型, 用至少含有 3 个节点的连通图  $G$  代替 SA-混合网络模型  $S(t, A(m))$  中的  $A(m)$ . 目前, 网络间的比较方法还在探索阶段, 研究文献十分之少; 本研究的方法仍需要深化、完善, 急需发现、发明新方法来比较、评估不同的网络.

### [参考文献]

- [1] 刘 涛, 陈 忠, 陈晓荣. 复杂网络理论及其应用研究概述[J]. 系统科学, 2005(6): 1-7.
- [2] NEWMAN M. The structure and function of complex networks[J]. SLAM Review, 45(2), 2003, 167-256.
- [3] WANG Xiaomin, YAO Bing, MA Fei, et al. On composition and decomposition of networks[C] // 2015 8th the International conference on biomedical engineering and informatics and knowledge discovery, FSKD2015, page783-788. DOI:10.1109/BMEI.2015.7401609, ISBN-13: 9781509000227.
- [4] WANG Xiaomin, YAO Bing, MA Fei, et al. Hierarchical structure and particular spanning trees of edge-bound growing network models [C] // 2016 12th International conference on fuzzy systems and knowledge discovery, FSKD2015, 444-449. DOI: 10.1109/FSKD.2015.7381983, ISBN-13: 9781467376822.
- [5] 那日萨, 张书超, 穆 青. 一类变幂率的无标度网络构建和分析[J]. 大连理工大学学报, 2010, 50(5): 811-815.
- [6] ZHANG Zhongzhi, ZHOU Shuigeng, FANG Lujiu, et al. Maximal planar scale-free Sierpinski networks with small-world effect and power-law strength-degree correlation [J]. EPL(Europhysics Letters) 2007, 79: 38007.
- [7] ZHANG Zhongzhi, FRANCESC C, GUILLAUME F, et al. High dimensional apollonian networks[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2006, 39(8): 1811-1818.
- [8] DOROGOVSTEV S N, GOLTSEV A V, MENDES J F F. Pseudofractal scale-free web [J]. Physicaal review, 2002, 65: 066122-066125.

[责任编辑:王景周,朱颖娜]