第 33 卷 第 3 期
2012 年 6 月

暨南大学学报(自然科学版)
Journal of Jinan University(Natural Science)

Vol. 33 No. 3
Jun. 2012

广义分数次积分算子在齐次 Morrey-Herz 空间上的有界性

杨明华， 许 明， 张学铭， 杨晓转

(暨南大学 数学系，广东 广州 510632)

[摘 要] 主要研究与二阶散度型椭圆算子 L 相伴的分数次积分算子 $L^{-\beta/2}$，采用对函数进行环形分解的技术和对算子转化为相应的截断算子的方法，得出其从 $MK_{p_1,q_1}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 到 $MK_{p_2,q_2}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 是有界的，从而推广了以前学者的结论.

[关键词] 齐次 Morrey-Herz 空间； 椭圆算子； 广义分数次积分算子； L^2 off-diagonal 估计

[中图分类号] O174.2 [文献标志码] A [文章编号] 1000-9965(2012)03-0239-05

The boundedness of generalized fractional integral operators on the homogeneous Morrey-Herz spaces

YANG Ming-hua， XU Ming， ZHANG Xue-ming， YANG Xiao-zhuan

(Department of Mathematics, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

[Abstract] The generalized fractional integral operators $L^{-\beta/2}$ associated to divergence form elliptic operator is studyed. By the methods of studying ring decomposition of functions and thier corresponding truncated operators, their boundedness of the results from space $MK_{p_1,q_1}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ to space $MK_{p_2,q_2}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ were established.

[Key words] homogeneous Morrey-Herz spaces; elliptic operator; generalized fractional integral operators; L^2 off-diagonal estimates

分数次积分算子是调和分析中以偏微分方程为背景的一种重要算子. 在偏微分方程中为了研究 Possion 方程，Sobolev[1] 引入经典的分数次算子又称 Riesz 位势算子 I_β 并证明 I_β 是 $(L^p(\mathbf{R}^n), L^q(\mathbf{R}^n))$ 型的. 1950 年，Zygmund 证明 I_β 是弱 $(L^1(\mathbf{R}^n), L^q(\mathbf{R}^n))$ 有界，1995 年 Fan Dashan 等[2-3] 给出了奇异积分算子在 Morrey 空间上的有界性，2002 年，Yang Dachun 等[4] 给出了 (θ, N) 型分数次积分算子的定义，并且证明这类算子在 Hardy 空间，弱 Hard 空间和 Herz 型 Hardy 空间的有界性，2004 年 Duong X T 等[5] 给出了广义分数次积分算子 $L^{-\beta/2}$ 在一定条件下从 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbf{R}^n)$ 是有界的. 2005 年，Lu Shanzhen 等[6-7] 在研究奇异积分算子时引入一类与 PDE 相关的比 Herz 空间和 Morrey 空间更一般的齐次 Morrey-Herz 空间，这类函数空间受到人们的重视，得到了许多算子在其上有界性的结果. 二阶散度型椭圆算子 L 相关的广义分数次积分算子是否在齐次 Morrey-Herz 空间上有界? 本文回答了这个问

[收稿日期] 2011-10-18
[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(10771221)；暨南大学青年自然科学基金支持项目(51208036)
[作者简介] 杨明华(1986-)，男，研究方向: 调和分析
通信作者: 许明(1972-)，博士，副教授，研究方向: 调和分析

题,得到了广义分数次积分算子 $L^{-\beta/2}$ 在 Morrey-Herz 空间上有界性的结论.

在叙述主要结果之前,先给出一些必要的记号,设 $B_k=(0,2^k)=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|\leqslant 2^k\}$,$A_k=B_k/B_{k-1}$,$k\in\mathbf{Z}$,$\chi_k=\chi_{A_k}$. 其中 χ_{A_k} 表示 A_k 特征函数.

注 本文中的 c 表示常数在不同的地方可能表示不同的值.

1 预备知识和主要结果

定义一个二阶散度型椭圆算子 $Lf=-div(A\nabla f)$,$A=A(x)$ 是指一个定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的复的 L^∞ 系数的 $n\times n$ 矩阵,且满足一致性椭圆条件:存在 $0<\lambda\leqslant\gamma<\infty$,使得 $\lambda|\xi|^2\leqslant\mathrm{Re}A\xi\cdot\bar{\xi}$,$|A\xi\cdot\bar{\xi}|\leqslant\gamma|\xi|\zeta$,其中 $\xi,\zeta\in\mathbf{C}^n$.

经典的分数次积分算子 I_β 定义为:$I_\beta=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\beta}}\mathrm{d}y$,其中 $n\geqslant 1$,$0<\beta<n$. 利用算子的谱理论,算子 L 的广义分数次积分定义为

$$L^{-\beta/2}f(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tL}(f)\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\beta/2}}.$$

当 $L=-\Delta$ 即 $\mathbf{R}^n$ 上的 laplace 算子时,以上广义分数次积分算子就是经典的分数次积分算子.

设 $p_t(x,y)$ 是解析半群 e^{-tL} 的热核,若满足 A 是实矩阵,或者 A 是 $n\leqslant 2$ 的复矩阵,或者当 $n\geqslant 3$ 核是 Hölder 连续的,那么 $p_t(x,y)$ 具有 Gaussian 上界,即

$$|p_t(x,y)|\leqslant\frac{c}{t^{\frac{n}{2}}}\mathrm{e}^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}. \tag{1.1}$$

定义 1.1[6] 设 $\alpha\in\mathbf{R}$,$\lambda\geqslant 0$,$0<p\leqslant\infty$,$0<q<\infty$,定义齐次 Morrey-Herz 空间 $MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 如下:

$$MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)=\{f\in L_{loc}^q(\mathbf{R}^n/\{0\}):\|f\|_{MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)}<\infty\},$$

其中 $\|f\|_{MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)}=\sup\limits_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\|f\chi_k\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}^p\right)^{1/p}$,当 $p=\infty$,按照通常意义形式来定义.

定义 1.2[7] 设 $1\leqslant p<\infty$,用 $L^{p,\varphi}=L^{p,\varphi}(\mathbf{R}^n)$ 表示局部可积函数 f 的空间,设 f 对所有 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 和每个 $r>0$ 满足 $\int_{B_r(x_0)}|f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant c^p\varphi(r)$,其中 $B_r(x_0)=\{x\in\mathbf{R}^n:|x-x_0|\leqslant r\}$,且用 $\|f\|_{L^{p,\varphi}}$ 表示满足上面条件的最小常数 c,当 $\varphi(r)=r^\lambda$,$0<\lambda<n$,$L^{p,\varphi}$ 就是经典的 Morrey 空间 $M_p^\lambda(\mathbf{R}^n)$.

定义 1.3[8] 设 $\alpha\in\mathbf{R}$,$\lambda\geqslant 0$,$0<p\leqslant\infty$,$0<q<\infty$,定义齐次 Herz 空间 $K_q^{\alpha,p}(\mathbf{R}^n)$ 如下:

$$K_q^{\alpha,p}(\mathbf{R}^n)=\{f\in L_{loc}^q(\mathbf{R}^n/\{0\}):\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathbf{R}^n)}<\infty\},$$

其中 $\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathbf{R}^n)}=\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p}\|f\chi_k\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}^p\right)^{1/p}$,当 $p=\infty$,按照通常意义形式来定义. 显然我们可以得到以下关系,

$$MK_{p,q}^{\alpha,0}(\mathbf{R}^n)=K_q^{\alpha,p}(\mathbf{R}^n),\quad M_q^\lambda(\mathbf{R}^n)\subset MK_{p,q}^{0,\lambda}(\mathbf{R}^n),$$

引理 1.1[5] 假设条件(1.1)成立,设 $0<\beta<n$,$1<p<n/\beta$,且 $1/q=1/p-\beta/n$,那么

$$\|L^{-\beta/2}(f)\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}\leqslant c\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}.$$

定理 1.1 设 $n\geqslant 2$,假设条件(1.1)成立,若 $0<\beta<n$,$1<q_1<n/\beta$,$0\leqslant\lambda<\infty$,$\lambda+\beta-n/q_1<\alpha<\lambda+n-n/q_1$,$1/q_2=1/q_1-\beta/n$,$0<p_1\leqslant p_2<\infty$ 则广义分数次积分算子 $L^{-\beta/2}$ 从 $MK_{p_1,q_1}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 到 $MK_{p_2,q_2}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 是有界的.

2 主要定理的证明

定理 1.1 的证明

注意到若 $p_1<p_2$ 则有 $MK_{p_1,q_1}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)\subset MK_{p_2,q_2}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)$,因此只需证明 $p_1=p_2\equiv p$ 情形,对任意 $f\in MK_{p,q_1}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)$,记

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\chi_jf(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}f_j(x) \tag{2.1}$$

则

$$\begin{aligned}\|L^{-\beta/2}(f)\|_{MK_{p,q_2}^{\alpha,\lambda}(R^n)}\leqslant{}& c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\|L^{-\beta/2}(f_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(R^n)}\right)^p\right)^{1/p}+\\&c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\left(\sum_{j=k-1}^{k+1}\|L^{-\beta/2}(f_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(R^n)}\right)^p\right)^{1/p}+\\&c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\left(\sum_{j=k+2}^{\infty}\|L^{-\beta/2}(f_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(R^n)}\right)^p\right)^{1/p}\equiv E+F+G.\end{aligned} \tag{2.2}$$

对于 F,由引理 1.1 知 $L^{-\beta/2}$ 从 $L^{q_1}(\mathbf{R}^n)$ 到 $L^{q_2}(\mathbf{R}^n)$ 上有界,因此容易得到

$$\begin{aligned}F\leqslant{}& c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\left(\sum_{j=k-1}^{k+1}\|f_j\chi_k\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\right)^p\right)^{1/p}\leqslant\\&c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\|f_k\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}^p\right)^{1/p}=\\&c\|f\|_{MK_{p,q_1}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{R}^n)}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

对于 E,当 $x\in A_k$,$j\leqslant k-2$,$y\in A_j$,显然有 $2^{k-2}\leqslant|x-y|\leqslant 2^{k+1}$,根据 Minkowski 和 Hölder 不等式及条件 $1/q_2=1/q_1-\beta/n$,得到

$$\| L^{-\beta/2}(f_j)\chi_k \|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)} \leqslant$$

$$c\Big(\int_{A_k}\Big(\int_0^\infty\int_{A_j} t^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}|f_j(y)|\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\beta/2}}\Big)^{q_2}\mathrm{d}x\Big)^{1/q_2} \leqslant$$

$$c\sum_{i=k-2}^{i=k}\Big(\int_{A_k}\Big(\int_0^\infty\int_{\{y\in A_j:2^i\leqslant|x-y|\leqslant 2^{i+1}\}} t^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}\cdot |f_j(y)|\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\beta/2}}\Big)^{q_2}\mathrm{d}x\Big)^{1/q_2} \leqslant$$

$$c\sum_{i=k-2}^{i=k}\Big(\int_{A_k}\Big(\int_0^\infty\int_{\{y\in A_j:2^i\leqslant|x-y|\leqslant 2^{i+1}\}} t^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-c\frac{(2^i)^2}{t}}\cdot |f_j(y)|\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\beta/2}}\Big)^{q_2}\mathrm{d}x\Big)^{1/q_2} \leqslant c\sum_{i=k-2}^{i=k}2^{kn/q_2}\cdot$$

$$2^{jn(1-1/q_1)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\Big(\int_0^{(2^i)^2}\frac{1}{t^{n/2+1-\beta/2}}e^{-c\frac{(2^i)^2}{t}}\mathrm{d}t\Big)+$$

$$c\sum_{i=k-2}^{i=k}2^{kn/q_2}\cdot 2^{jn(1-1/q_1)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\cdot$$

$$\Big(\int_{(2^i)^2}^\infty\frac{1}{t^{n/2+1-\beta/2}}\mathrm{e}^{-c\frac{(2^i)^2}{t}}\mathrm{d}t\Big)\leqslant c\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}2^{kn/q_2}\cdot$$

$$2^{jn(1-1/q_1)}\cdot(2^k)^{\beta-n}\leqslant c2^{(k-j)(n/q_1-n)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)} \tag{2.4}$$

把(2.4)代入 E 中,由 Hölder 不等式及注意 $\lambda+n-\frac{n}{q_1}>\alpha$,$j\leqslant k-2$

$$E\leqslant c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\big(2^{(k-j)(n/q_1-n)}\cdot \|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\big)^p\Big)^{1/p}\leqslant c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\cdot$$

$$\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\big(2^{(k-j)(n/q_1-n)-\lambda k+k\alpha}2^{-j\alpha}2^{j\lambda}2^{-j\lambda}\cdot \Big(\sum_{l=-\infty}^{j}2^{l\alpha p}\|f_l\|^p_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\Big)\big)^p\Big)^{1/p}\leqslant$$

$$c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\big(2^{(k-j)(n/q_1-n+\alpha-\lambda)}\big)^p\Big)^{1/p}\leqslant$$

$$c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\Big)^{1/p}\leqslant c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}.$$

同理我们通过类似于 E 的证明方法估计 G,对于 G,当 $x\in A_k$,$k\leqslant j-2$,$y\in A_j$,有 $2^{j-2}\leqslant|x-y|\leqslant 2^{j+1}$,根据 Minkowski 和 Hölder 不等式得到,我们有

$$\| L^{-\beta/2}(f_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)}\leqslant c2^{(k-j)(n/q_1-\beta)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)} \tag{2.5}$$

把(2.5)代入 G 中由 Hölder 不等式及注意 $\lambda+\beta-\frac{n}{q_1}<\alpha$ 和 $k\leqslant j-2$,

$$E\leqslant c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\big(2^{(k-j)(n/q_1-\beta)}\cdot \|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\big)^p\Big)^{1/p}\leqslant c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}$$

$$\big(2^{(k-j)(n/q_1-\beta)-\lambda k+k\alpha}2^{-j\alpha}2^{j\lambda}2^{-j\lambda}\cdot \Big(\sum_{l=-\infty}^{j}2^{l\alpha p}\|f_l\|^p_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\Big)\big)^p\Big)^{1/p}\leqslant$$

$$c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\big(2^{(k-j)(n/q_1-\beta+\alpha-\lambda)}\big)^p\Big)^{1/p}\leqslant$$

$$c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\Big)^{1/p}\leqslant c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}.$$

综合 E,F,G 得到

$$\| L^{-\beta/2}(f)\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_2}(\mathbf{R}^n)}\leqslant E+F+G\leqslant c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}.$$

定理1.1的证明完毕

3 补充说明

文献[9]得到当 $n>2$ 时,散度型椭圆算子 L 相伴的热核一般不满足(1.1),文献[10]发现当 $n\geqslant 5$ 时,散度型椭圆算子 L 相伴的热核 $p_t(x,y)$ 不具有 Possion 上界,当热核 $p_t(x,y)$ 不满足假设条件(1.1),我们就不能利用引理1.1的估计去得到上文给出的定理2.1的证明结果. 那么如果热核 $p_t(x,y)$ 不满足假设条件(1.1),广义分数次积分算子在 Morrey-Herz 空间上的有界性怎样呢? 事实上,这种算子 L 相伴的热核具有 L^2 off-diagonal 估计,本文通过利用热核的 L^2 off - diagonal 估计,得到广义分数次积分算子在齐次 Morrey-Herz 空间上有界性的结论

设 E,F 为 $\mathbf{R}^n$ 中的两个闭子集,$dist(E,F)$ 表示 E,F 两个集合之间的欧几里德距离,$\vec{f}$ 是 n-tupple 函数. 下面是有关 L^2 off - diagonal 估计的引理.

引理3.1[11] 设 E,F 是 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中的两个闭集子集,设 $p_n=\frac{2n}{n+2}$,且对某 $\varepsilon>0$,$p_n-\varepsilon<p\leqslant 2$. 则对所有的 $t>0$

$$\|\mathrm{e}^{-tL}f\|_{L^2(F)}\leqslant Ct^{-\gamma_p/2}\mathrm{e}^{-\frac{dist(E,F)^2}{ct}}\|f\|_{L^p(E)},\ \mathrm{supp}f\subset E;$$

$$\|tL\mathrm{e}^{-tL}f\|_{L^2(F)}\leqslant Ct^{-\gamma_p/2}\mathrm{e}^{-\frac{dist(E,F)^2}{ct}}\|f\|_{L^p(E)},\ \mathrm{supp}f\subset E;$$

$$\|t^{1/2}\nabla\mathrm{e}^{-tL}f\|_{L^2(F)}\leqslant Ct^{-\gamma_p/2}\mathrm{e}^{-\frac{dist(E,F)^2}{ct}}\|f\|_{L^p(E)},\ \mathrm{supp}f\subset E;$$

$$\| t^{1/2}e^{-tL}div\vec{f}\|_{L^2(F)}\leqslant Ct^{-\gamma_p/2}e^{-\frac{dist(E,F)^2}{ct}}\|\vec{f}\|_{L^p(E)},\ \mathrm{supp}\vec{f}\subset E.$$

这里的$\gamma_p=\frac{n}{p}-\frac{n}{2}$,$c>0$仅仅依赖于$\lambda$和$\gamma$,$C$仅仅与$n$,$\lambda$和$\gamma$相关

引理3.2[12] 设$n>2$,$0<\beta<n$. 若$p_0=\frac{2n}{n+2}$,$p_1=\left(\frac{n-2}{2n}+\frac{\beta}{n}\right)^{-1}$和$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$,则$L^{-\beta/2}$从$L^p(\mathbf{R}^n)$到$L^q(\mathbf{R}^n)$有界,其中$p_0<p<p_1$.

定理3.1 设$n>2$,设$0<\beta<n$,$\frac{2n}{n+2}<q_1<\frac{2n}{n+2\beta}<\min\left(2,\left(\frac{n-2}{2n}+\frac{\beta}{n}\right)^{-1}\right)$,$0\leqslant\lambda<\infty$,$\lambda+\beta+\frac{n}{2}-\frac{n}{q_1}<\alpha<\lambda$,$1/q_2=1/q_1-\beta/n$,$0<p_1\leqslant p_2<\infty$,则广义分数次积分算子$L^{-\beta/2}$从$MK^{\alpha,\lambda}_{p_1,q_1}(\mathbf{R}^n)$到$MK^{\alpha,\lambda}_{p_2,q_2}(\mathbf{R}^n)$是有界的.

定理定理3.1的证明

同(2.1)和(2.2)一样的方法,我们得到

$$\begin{aligned}&\|L^{-\beta/2}(f)\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_2}(\mathbf{R}^n)}\leqslant c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\cdot\\&\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\|L^{-\beta/2}(f_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)}\right)^p\right)^{1/p}+\\&c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\left(\sum_{j=k-1}^{k+1}|L^{-\beta/2}(f_j)\chi_k|_{L^{q_2}(R^n)}\right)^p\right)^{1/p}+\\&c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\left(\sum_{j=k+2}^{\infty}\|L^{-\beta/2}(f_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)}\right)^p\right)^{1/p}\\&\equiv H+K+J.\end{aligned}$$

对于K,由于$\frac{2n}{n+2}<q_1<\frac{2n}{n+2\beta}<\left(\frac{n-2}{2n}+\frac{\beta}{n}\right)^{-1}$,因此根据引理3.2知$L^{-\beta/2}$从$L^{q_1}(\mathbf{R}^n)$到$L^{q_2}(\mathbf{R}^n)$上有界,因此容易得到

$$\begin{aligned}K&\leqslant c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\left(\sum_{j=k-1}^{k+1}\|f_j\chi_k\|_{L^{q_1}(R^n)}\right)^p\right)^{1/p}\leqslant\\&c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\|f_k\|^p_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\right)^{1/p}=\\&c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}.\end{aligned}$$

对于H,当$x\in A_k$,$j\leqslant k-2$,$y\in A_j$,显然有$2^{k-2}\leqslant|x-y|\leqslant2^{k+1}$,根据Minkowski和Hölder不等式及引理3.1,注意到$1/q_2=1/q_1-\beta/n$,得到

$$\begin{aligned}&\|L^{-\beta/2}(f_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(\mathbf{R}^n)}\leqslant\\&c2^{kn(1/q_2-1/2)}\left(\int_{A_k}|L^{-\beta/2}(f_j)(x)|^2dx\right)^{1/2}\leqslant\\&c2^{kn(1/q_2-1/2)}\left(\int_{A_k}\left|\int_0^\infty e^{-tL}(f_j)(x)\frac{dt}{t^{1-\beta/2}}\right|^2dx\right)^{1/2}\leqslant\\&c2^{kn(1/q_2-1/2)}\sum_{i=k-2}^{i=k}\left(\int_0^{(2^i)^2}t^{-\gamma_{q_1}/2}e^{-\frac{dist(A_k,A_j)^2}{ct}}\|f_j\|_{L^{q_1}(A_j)}\frac{dt}{t^{1-\beta/2}}\right)+\\&c2^{kn(1/q_2-1/2)}\sum_{i=k-2}^{i=k}\left(\int_{(2^i)^2}^\infty t^{-\gamma_{q_1}/2}e^{-\frac{dist(A_k,A_j)^2}{ct}}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\frac{dt}{t^{1-\beta/2}}\right)\leqslant\\&c2^{kn(1/q_2-1/2)}\sum_{i=k-2}^{i=k}\left(\int_0^{(2^i)^2}t^{-\gamma_{q_1}/2}e^{-(\frac{2i}{t^{1/2}})^2}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\frac{dt}{t^{1-\beta/2}}\right)+\\&c2^{kn(1/q_2-1/2)}\sum_{i=k-2}^{i=k}\left(\int_{(2^i)^2}^\infty t^{-\gamma_{q_1}/2}e^{-(\frac{2i}{t^{1/2}})^2}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\frac{dt}{t^{1-\beta/2}}\right)\leqslant\\&c\sum_{i=k-2}^{i=k}2^{kn(1/q_2-1/2)}\cdot(2^i)^{\frac{-n}{q_1+\frac{1}{2}}+\beta}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\leqslant\\&c\|f_j\|_{Lq_1(\mathbf{R}^n)},\end{aligned}$$

把(3.1)代入H中由Hölder不等式以及注意到$\alpha<\lambda$以及$j\leqslant k-2$,

$$\begin{aligned}H&\leqslant c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\right)^p\right)^{1/p}\leqslant\\&c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}2^{-k\lambda p}2^{k\alpha p}\right.\\&\left.\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\right)^p\right)^{1/p}\leqslant\\&c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\left(2^{-\lambda k+k\alpha}2^{-j\alpha}2^{k\lambda}2^{-j\lambda}\cdot\right.\right.\right.\\&\left.\left.\left.\left(\sum_{l=-\infty}^{j}2^{l\alpha p}\|f_l\|^p_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\right)\right)\right)\right)^{1/p}\leqslant\\&c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbf{R}^n)}\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\cdot\\&\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\left(2^{(k-j)(\alpha-\lambda)}\right)^p\right)\right)^{1/p}\leqslant\\&c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbf{R}^n)}\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\right)^{1/p}\leqslant\\&c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbf{R}^n)}.\end{aligned}$$

类似于H过程估计J,对于J,$x\in A_k$,$k\leqslant j-2$,$y\in A_j$,有$2^{j-2}\leqslant|x-y|\leqslant2^{j+1}$.

根据Minkowski和Hölder不等式以及引理3.1,注意到$1/q_2=1/q_1-\beta/n$,得到

$$\begin{aligned}&\|L^{-\beta/2}(f_j)\chi_k\|\ L^{q_2}(\mathbf{R}^n)\leqslant\\&c2^{kn(1/q_2-1/2)}\sum_{i=j-2}^{i=j}\left(\int_0^{(2^i)^2}t^{-\gamma_{q_1}/2}e^{-(\frac{2i}{t^{1/2}})^2}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\frac{dt}{t^{1-\beta/2}}\right)+\\&c2^{kn(1/q_2-1/2)}\sum_{i=j-2}^{i=j}\left(\int_{(2^i)^2}^\infty t^{-\gamma_{q_1}/2}e^{-(\frac{2i}{t^{1/2}})^2}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\frac{dt}{t^{1-\beta/2}}\right)\leqslant\\&c\sum_{i=k-2}^{i=k}2^{kn(1/q_2-1/2)}\cdot(2^i)^{n(-1/q_1+1/2)+\beta}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\leqslant\end{aligned}$$

$$c2^{(k-j)(n/q_1-\beta-n/2)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}, \tag{3.2}$$

把(3.2)代入 J 中根据 Hölder 不等式,注意到 $\lambda+\beta+\frac{n}{2}-\frac{n}{q_1}<\alpha, 1<q_1<\frac{2n}{n+2\beta}, k\leqslant j-2$,

$$\begin{aligned}G &\leqslant c\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\\ &\quad\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\big(2^{-\lambda k+k\alpha}2^{-j\alpha}2^{k\lambda}2^{-j\lambda}2^{(k-j)(n/q_1-\beta-n/2)}\cdot\\ &\quad\Big(\sum_{l=-\infty}^{j}2^{l\alpha p}\|f_l\|^p_{L^{q_1}(\mathbf{R}^n)}\Big)\Big)^p\Big)^{1/p}\leqslant\\ &\quad c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\cdot\\ &\quad\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\big(2^{(k-j)(\alpha-\lambda+n/q_1-\beta-n/2)}\big)^p\Big)\Big)^{1/p}\leqslant\\ &\quad c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda p}\Big)^{1/p}\leqslant\\ &\quad c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}\end{aligned}$$

综合 H,K,J 的估计得到

$$\|\nabla L^{-1/2}(f)\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_2}(\mathbf{R}^n)}\leqslant H+K+J\leqslant c\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\mathbf{R}^n)}$$

定理3.1的证明完毕

参考文献

[1] STEIN E M. Singular integrals and differentiability properties of functions [M]. Princeton New Jersey: Princeton University Press, 1970.

[2] FAN Dashan, LU Shanzhen, YANG Dachun. Regularity in Morrey spaces of strong solutions to nondvergence elliptic equations with VMO Coefficients [J]. Georgian Math J, 1998, 5: 425 - 440.

[3] FAN Dashan, LU Shanzhen, YANG Dachun. Boundedness of operators in Morrey spaces on homogenous spaces and its applications [J]. Acta Math Sinica (N. S) SUPPL, 1998, 14: 625 - 634.

[4] YANG Da-chun, ZHANG Pu, TANG Can-qin. Bounded of generalized fractional integral operators [J]. Approx theory & its Appl, 2002, 18: 34 - 54.

[5] DUONG X T, YAN Li-xin. On commutators of fractional integrals [J]. Soc Math American, 2004(132): 35 - 49.

[6] LU Shan-zhen, XU Li-fang. Boundedness of rough singular integral operators on the homogeneous Morrey-Herz spaces [J]. Hokkaido Math J, 2005, 34(2): 299 - 314.

[7] LU Shan-zhen, YANG Da-chun, ZHOU Zu-sheng. Sublinear operators with rough Kernel on generalized Morrey spaces [J]. Hokkaido Math J, 1998, 27(1): 219 - 232.

[8] LU Shan-zhen, TANG Lin, Yang Da-chun. Boundedness of commutatots on the homogeneous Herz spaces [J]. SciChina Ser A, 1998, 41(10): 1023 - 1033.

[9] DAVIES E B. Limits on M^p regularity of self-adjoint elliptic operators [J]. Diff Eq, 1997, 135: 83 - 102.

[10] HOFMANN MARTELL M J. L^p bounds for Riesz trasforms and square roots associated to second order elliptic operators [J]. Pub Math, 2003, 47, 497 - 515.

[11] AUSCHER P. On necessary and sufficient conditions for L^p estimates of Riesz transform associated to elliptic operators on and related estimates [J]. Mem Amer Math Soc, 2007, 186: 871.

[12] DENG Dong-gao, XU Ming, YAN Li-xin. Fractional integration associated to higher order elliptic operators [J]. Chin Ann Math, 2007, 2: 229 - 238.

[责任编辑: 王景周]